57. Théorème de Weierstrass

[QZ13, §XIII.II.1, p518–519]

ÉNONCÉ

Théorème. [théorème de Weierstrass]
$\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C},\|.\|_\infty)$ pour $a<b\in\mathbb{R}$.

DÉVELOPPEMENT

Quitte à dillater par $t\longmapsto a+(b-a)t$, on suppose $[a,b]=[0,1]$. Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
On définit $\omega:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+,\delta\longmapsto\sup\{|f(u)-f(v)|\mid u,v\in[0,1]\text{ et }|v-u|\leq\delta\}$ le module de continuité de f, bien défini par uniforme continuité, qui vérifie :
(i) ω est croissante,
(ii) $\omega(0)=0$ et ω est continue en 0.
(iii) Pour $\lambda\geq0$ et $\delta\geq0$, on a $\omega(\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta)$.

Utilisons ces propriétés pour montrer le résultat.
Soit $x\in[0,1]$. On considère $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathcal{B}(x)$ et on pose $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ puis

$$B_n(f)(x)=\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big]=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

par le lemme de transfert. Ainsi $B_n(f)$ est un polynôme, appelé polynôme de Bernstein.

On va montrer que $B_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{u}f$ en majorant $|f-B_n(f)|(x)$ indépendamment de x par le module de continuité de f en des valeurs qui tendent vers 0 lorsque $n\to+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}|f-B_n(f)|(x)&=\Big|\mathbb{E}\Big[f(x)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big]\Big|\leq\mathbb{E}\Big[\Big|f(x)-f\Big(\frac{S_n}{n}\Big)\Big|\Big]\leq\mathbb{E}\Big[\omega\Big(\Big|x-\frac{S_n}{n}\Big|\Big)\Big]\\&\leq\mathbb{E}\Big[\Big(1+\sqrt{n}\Big|x-\frac{S_n}{n}\Big|\Big)\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big]\leq\Big(1+\sqrt{n}\mathbb{E}\Big[\Big|x-\frac{S_n}{n}\Big|\Big]\Big)\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\end{aligned}$$

par définition de ω et par le point (iii). Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}\Big[\Big|x-\frac{S_n}{n}\Big|\Big]\leq\mathbb{E}[1^2]^{1/2}\mathbb{E}\Big[\Big(x-\frac{S_n}{n}\Big)^2\Big]^{1/2}=\sqrt{\mathbb{E}\Big[\Big(x-\frac{S_n}{n}\Big)^2\Big]}$$

et donc puisque $x-\frac{S_n}{n}$ est centrée :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(x-\frac{S_n}{n}\Big)^2\Big]=\mathrm{Var}\Big(\frac{S_n}{n}\Big)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i)=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}$$

Donc $\|f-B_n(f)\|_{\infty,[0,1]}\leq\frac{3}{2}\omega\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$ et on obtient le résultat en utilisant le point (ii), avec un contrôle de la vitesse de convergence par le module de continuité.

Vérifions les propriétés de ω :
(ii) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe η tel que $\omega(\eta)<\varepsilon$ par uniforme continuité de f.
Et donc $\omega\leq\varepsilon$ sur $]0,\eta]$ d'où $\omega(0^+)\leq\varepsilon$.
(iii) Soit $\lambda,\delta>0$. Soient $u<v$ tels que $|v-u|\leq\lambda\delta$.
On considère la subdivision $x_i=u+i\delta$ si $u+i\delta<v$ puis $x_m=v$ dès que $u+m\delta\geq v$.
On a nécessairement[1] $m\leq\lambda+1$ et alors :

$$|f(v)-f(u)|\leq\textstyle\sum_{i=0}^{m-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leq m\omega(\delta)\leq(\lfloor\lambda\rfloor+1)\omega(\delta)\leq(\lambda+1)\omega(\delta)$$

Si f est k-lipschitzienne, on a $\omega(\delta)\leq k\delta$ donc la vitesse de convergence est au pire en $1/\sqrt{n}$.
Remarquons maintenant que cette vitesse est optimale.
Considérons $f:x\longmapsto\big|x-\frac{1}{2}\big|$, 1-lipschitzienne et vérifiant $\omega(\delta)=\delta$. On a :

$$\|f-B_n(f)\|_{\infty,[0,1]}\geq\Big|f\Big(\frac{1}{2}\Big)-B_n(f)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big|=\Big|B_n(f)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big|=\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\Big|\Big]=\frac{1}{2n}\mathbb{E}[|2S_n-n|]$$

Ecrivons $2S_n-n=\sum_{i=1}^n2X_i-1=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i$ où $\varepsilon_i\sim\mathcal{R}(1/2)$ et posons $Y=\prod_{j=1}^n\big(1+i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\big)$.
D'une part $\sqrt{\mathrm{e}}\mathbb{E}[|2S_n-n|]\geq\mathbb{E}[|2S_n-n|\,|Y|]$ puisque :

$$|Y|=\textstyle\prod_{j=1}^n\sqrt{1+\varepsilon_j^2/n}=\prod_{j=1}^n\sqrt{1+1/n}\leq\prod_{j=1}^n\sqrt{\mathrm{e}^{1/n}}\leq\sqrt{\mathrm{e}}$$

et d'autre part on a :

$$\mathbb{E}[(2S_n-n)Y]=n\mathbb{E}\Big[\varepsilon_1\Big(1+i\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{n}}\Big)\prod_{j>1}\Big(1+i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\Big)\Big]=n\Big(\mathbb{E}[\varepsilon_1]+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_1^2]\Big)\prod_{j>1}\Big(1+i\frac{\mathbb{E}[\varepsilon_j]}{\sqrt{n}}\Big)=i\sqrt{n}$$

Finalement $\|f-B_n(f)\|_{\infty,[0,1]}\geq\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}}=\frac{1}{2\sqrt{e}\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$.

COMMENTAIRES

On ne peut pas étendre ce résultat à un intervalle non borné. En effet, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}[X]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f continue, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme infinie, donc à partir d'un certain rang N_0, on a $\|P_{n+1}-P_n\|_\infty\leq\varepsilon$, d'où $P_{n+1}-P_n$ est constant égal à c_n. Alors $f=P_{N_0}+\sum_{n\geq N_0}c_n$ est aussi un polynôme.

1. faire un schéma