56. Théorème de Stone-Weierstrass [HL09, Ch1, p26–30]

Énoncé

Soit (X, d) un compact non vide.

Théorème. [Théorème de Stone-Weierstrass]
Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et unitaire. Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Développement

On élimine directement le cas où X n'a qu'un élément, le résultat étant alors clair puisque H contient les fonctions constantes (H est unitaire).

1. On commence par montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} |.| \qquad \text{sur } [-1,1]$$

En effet, définissons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2)$.
Montrons par récurrence que pour tout entier n, $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq |.|$ sur $[-1, 1]$.

- Pour $n = 0$, on a $P_1 = X^2/2$ donc $0 = P_0 \leq P_1 \leq |.|$.
- Supposons le résultat vrai au rang n. On a $P_{n+1} \leq |.|$, donc $P_{n+2} - P_{n+1} \geq 0$ et on écrit pour $x \in [-1, 1]$:

$$|x| - P_{n+2}(x) = (|x| - P_{n+1}(x))\Big(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\Big) \geq |x|$$

Ainsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc converge et sa limite h vérifie, pour $x \in [-1, 1]$, $0 \leq h(x) \leq |x|$ et $h(x) = h(x) + \frac{1}{2}(x^2 - h(x)^2)$, donc $h(x) = |x|$.
Ainsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|.|$ sur $[-1, 1]$. De plus, cette convergence est uniforme par le théorème de Dini.

2. Montrons que si $f, g \in H$, alors $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont dans $\overline{H}$.

Pour $h \in H$, on a $|h| \in \overline{H}$. En effet, si $h \neq 0$, on a que $P_n\big(\frac{h}{\|h\|_\infty}\big) = \sum_{k=0}^{p} a_k \big(\frac{h}{\|h\|_\infty}\big)^k \in H$ car H est une sous-algèbre unitaire. Par convergence uniforme de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $|.|$, on en déduit que $|h| / \|h\|_\infty \in \overline{H}$ puis $|h| \in \overline{H}$.

Revenons à $f, g \in H$, Alors $\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in \overline{H}$, $\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in \overline{H}$.

3. Montrons désormais que pour $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on peut trouver $u \in H$ telle que

$$u(x_1) = \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad u(x_2) = \alpha_2$$

En effet, H est séparante donc il existe $u_0 \in H$ telle que $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$. Le système

$$\begin{cases} \lambda u_0(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda u_0(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$

est donc de Cramer, il admet une solution $(\lambda_\star, \mu_\star)$ et en posant $u = \lambda_\star u_0 + \mu_\star$, on a que $u \in H$ est satisfaisant.

4. Enfin, montrons que H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $v \in \overline{H}$ telle que $\|v - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $x \in X$.
Pour tout $y \in X$, il existe $u_y \in H$ telle que $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$.
Posons alors $\mathcal{O}_y = \{x' \in X \,|\, u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$. C'est un ouvert[1] contenant x et y.

Ecrivons donc $X = \cup_{y\in X} \mathcal{O}_y$. Par compacité de X, il existe $y_1, \ldots, y_r$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{y_i}$$

Posons alors $v_x = \max_{1\leq i\leq r} u_{y_i}$. On a $v_x \in \overline{H}$ par le point 2). De plus $v_x(x) = f(x)$ et pour tout $x' \in X$, on a $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$.
Posons $\Omega_x = \{x' \in X \,|\, v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. Ω_x est un ouvert contenant x, donc $X = \cup_{x\in X} \Omega_x$. De même, il existe $x_1, \ldots, x_m$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_{x_j}$$

En posant finalement $v = \min_{1\leq j\leq m} v_{x_j} \in \overline{H}$, on a par ce qui précède que $|v(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.
Ainsi on a trouvé $v \in \overline{H}$ tel que $\|v - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Le raisonnement étant valable pour tout ε, on en déduit que $f \in \overline{H}$.

Donc $\overline{H} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et H est dense.

Commentaires

On utilise le théorème de Dini qu'il faut donc savoir démontrer.

On trouvera dans le [HL09] une extension dans le cas complexe.

1. par continuité de u_y et f