

55. Théorème de SARD

[FGN07, §4.28, p253]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [THÉORÈME DE SARD]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et C l'ensemble des zéros de f' . Alors $f(C)$ est de mesure nulle.

DÉVELOPPEMENT

1. Commençons par montrer que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, il existe une famille dénombrable d'intervalles $(U_i)_{i \in I}$ disjoints tels que $U = \cup_{i \in I} U_i$.

Soit $U = \cup_{i \in I} U_i$ la décomposition en composantes connexes de U . On va montrer que la famille $(U_i)_{i \in I}$ est satisfaisante. En effet :

- Chaque U_i est connexe donc est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Comme U est ouvert, chaque U_i est un ouvert.
En effet si $x \in U_i$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$, et donc $U_i \cup]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ est un connexe de U contenant U_i , mais comme U_i est le plus grand connexe de U contenant x , on a en fait égalité des deux ensembles et donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U_i$. Ainsi U_i est ouvert.
- Enfin, chaque U_i contient un rationnel q_i , et l'application $i \in I \mapsto q_i$ est clairement injective puisque les $(U_i)_{i \in I}$ sont disjoints. Ainsi I est dénombrable.

2. Passons au théorème de SARD.

Pour commencer, fixons $N \in \mathbb{N}^*$ et étudions f sur $I_N = [-N, N]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$A = \{x \in I_N \mid |f'(x)| < \varepsilon\}$$

Par continuité de f' , A est un ouvert de I_N . On peut donc écrire $A = \cup_{i \in I} A_i$ la décomposition en ouverts disjoints de A .

On sait que f est ε -lipschitzienne sur chaque A_i par l'inégalité des accroissements finis, et donc $f(A_i)$ est un intervalle de longueur au plus $\varepsilon \text{Leb}(A_i)$.

Comme $C \cap I_N \subset A \subset I_N$, il vient alors :

$$\text{Leb}(f(C \cap I_N)) \leq \text{Leb}\left(f\left(\cup_{i \in I} A_i\right)\right) \leq \sum_{i \in I} \text{Leb}(f(A_i)) \leq \varepsilon \text{Leb}(A) \leq \varepsilon \text{Leb}(I_N)$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient que $f(C \cap I_N)$ est de mesure nulle.

3. Reste à en déduire que $f(C)$ est de mesure nulle.

Fixons à nouveau $\varepsilon > 0$ et choisissons, pour $N \in \mathbb{N}^*$, J_N tel que $f(C \cap I_N) \subset J_N$ et $\text{Leb}(J_N) \leq \frac{\varepsilon}{2^N}$. Il vient alors puisque $f(C) = \cup_{N \in \mathbb{N}^*} f(C \cap I_N)$:

$$\text{Leb}(f(C)) = \text{Leb}\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} f(C \cap I_N)\right) \leq \text{Leb}\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} J_N\right) \leq \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \text{Leb}(J_N) \leq \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^N} \leq \varepsilon$$

COMMENTAIRES

Ce développement est un peu court, il convient donc de l'illustrer par quelques dessins. Notamment montrer qu'une dérivée nulle en un point aplatisse tout voisinage de ce point lorsque l'on prend son image par f : c'est l'idée principale du développement.

On peut conclure en annonçant que le résultat est vrai lorsque f' n'est pas continue, mais c'est plus difficile à montrer (voir [GT98]).