

28. Théorème des extrema liés

[Gou08, §5.2/3, p317/327]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS]

Soit $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur U ouvert.

Notons $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ sont libres, alors il existe des réels (uniques) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de LAGRANGE, tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$$

DÉVELOPPEMENT

Soit $a \in \Gamma$ un extremum local de $f|_\Gamma$ tel que $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre.

Nécessairement $r \leq n$ et en cas d'égalité, la famille est une base du dual de $\mathbb{R}^n$, donc le résultat est évident. On suppose donc $r < n$ et on pose $s = n - r \geq 1$. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$, on écrit ses éléments sous la forme $(x, y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$. On note $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$. La matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(a) & \dots & \partial_{x_s} g_1(a) & \partial_{y_1} g_1(a) & \dots & \partial_{y_r} g_1(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} g_r(a) & \dots & \partial_{x_s} g_r(a) & \partial_{y_1} g_r(a) & \dots & \partial_{y_r} g_r(a) \end{pmatrix}$$

est de rang r , par hypothèse de liberté de $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$. On en extrait une matrice carrée de taille r inversible. Quitte à renommer les variables, on suppose que c'est

$$M_{a,2} = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} g_1(a) & \dots & \partial_{y_r} g_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} g_r(a) & \dots & \partial_{y_r} g_r(a) \end{pmatrix}$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à $g = (g_1, \dots, g_r)$ en a puisque g est $\mathcal{C}^1$, $g(a) = g((\alpha, \beta)) = 0$ et $\partial_2 g(\alpha, \beta)$ est inversible par ce qui précède : il existe donc φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g((x, y)) = 0$ au voisinage de $a = (\alpha, \beta)$ si et seulement si $y = \varphi(x)$, c'est-à-dire localement $(x, y) \in \Gamma \iff y = \varphi(x)$.

Posons alors $h : x \mapsto f(x, \varphi(x))$ au voisinage de α . h admet un extremum local en α puisque $(\alpha, \varphi(\alpha)) = a$ et $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$. Si $u : x \mapsto (x, \varphi(x))$, on a que h est différentiable en α par composition et $0 = dh(\alpha) = df(u(\alpha)) \circ du(\alpha)$, ce qui donne matriciellement :

$$0 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(a) & \dots & \partial_{x_s} f(a) & \partial_{y_1} f(a) & \dots & \partial_{y_r} f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \partial_{x_1} \varphi_1(\alpha) & \dots & \partial_{x_s} \varphi_1(\alpha) & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \partial_{x_1} \varphi_r(\alpha) & \dots & \partial_{x_s} \varphi_r(\alpha) & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(a) + \sum_{j=1}^r \partial_{x_1} \varphi_j(\alpha) \partial_{y_j} f(a) \\ \vdots \\ \partial_{x_s} f(a) + \sum_{j=1}^r \partial_{x_s} \varphi_j(\alpha) \partial_{y_j} f(a) \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq s$, on a $0 = \partial_{x_i} h(\alpha) = \partial_{x_i} f(a) + \sum_{j=1}^r \partial_{x_i} \varphi_j(\alpha) \partial_{y_j} f(a)$.

Par ailleurs, comme pour tout $1 \leq k \leq r$, $g_k(x, \varphi(x)) = 0$, on a de même :

$$\forall k \in [1, r], \forall 1 \leq i \leq s, 0 = \partial_{x_i} g_k(a) + \sum_{j=1}^r \partial_{x_i} \varphi_j(\alpha) \partial_{y_j} g_k(a)$$

Considérons alors :

$$M = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(a) & \dots & \partial_{x_s} f(a) & \partial_{y_1} f(a) & \dots & \partial_{y_r} f(a) \\ \partial_{x_1} g_1(a) & \dots & \partial_{x_s} g_1(a) & \partial_{y_1} g_1(a) & \dots & \partial_{y_r} g_1(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} g_r(a) & \dots & \partial_{x_s} g_r(a) & \partial_{y_1} g_r(a) & \dots & \partial_{y_r} g_r(a) \end{pmatrix}$$

Par ce qui précède, les s premières colonnes de M sont des combinaisons linéaires des r dernières ($C_k = \sum_{j=1}^r \partial_{x_k} \varphi_j(\alpha) C_{s+j}$), donc M est de rang au plus r . Ainsi les lignes de M sont liées. Comme les r dernières lignes sont libres par hypothèse, on a que la première est combinaison linéaire des autres. Écrivons $L_0 = \sum_{i=1}^r \lambda L_i$. On a alors

$$df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_i(a)$$

L'unicité des $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ est claire puisque $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre.

COMMENTAIRES

Faire un joli dessin pour expliquer l'intuition ! Prendre par exemple pour Γ la sphère unité de pour f une application linéaire.