52. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire [Ber17]

ÉNONCÉ

Théorème. [Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Alors il existe une unique solution y globale de $y' = Ay + B$ telle que $y(t_0) = y_0$.

DÉVELOPPEMENT

Supposons d'abord que I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Soit $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$. E est complet pour $\|.\|_\infty$ (associée à une norme $\|.\|$ quelconque sur $\mathbb{K}^n$).

Posons $\alpha = \sup_{t\in I} |||A(t)|||$ (fini par compacité et continuité de A) et considérons l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & \left(t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\right) \end{array}$$

On va montrer que l'une de ses itérées est contractante.

Soit $y_1, y_2 \in E$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall t \in I, \|\Phi^p(y_1)(t) - \Phi^p(y_2)(t)\| \leq \frac{\alpha^p |t - t_0|^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

- Le résultat est clair pour $p = 0$.
- Si le résultat est vrai au rang $p \in \mathbb{N}$, il vient pour $t \in I$:

$$\begin{aligned} \left\|\Phi^{p+1}(y_1)(t) - \Phi^{p+1}(y_2)(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^t A(s)[\Phi^p(y_1)(s) - \Phi^p(y_2)(s)]ds\right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t |||A(s)|||\, \|\Phi^p(y_1)(s) - \Phi^p(y_2)(s)\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \alpha \times \frac{\alpha^p |s - t_0|^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_\infty\, ds \\ &\leq \frac{\alpha^{p+1}}{p!} \|y_1 - y_2\|_\infty \int_{t_0}^t |s - t_0|^p\, ds \\ &\leq \frac{\alpha^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $p + 1$.

On obtient donc le résultat par principe de récurrence, d'où l'on déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \|\Phi^p(y_1) - \Phi^p(y_2)\|_\infty \leq \frac{\alpha^p \ell(I)^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

où $\ell(I)$ est la longueur de I (supposée finie).

Comme $\frac{\alpha^p \ell(I)^p}{p!} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que Φ^p est strictement contractante, et alors Φ admet un unique point fixe.
Ainsi il existe une unique solution au problème de Cauchy sur I.

Supposons maintenant I quelconque.

- Vérifions l'existence d'une solution.
  Si $J \subset I$ est compact et contient t_0, on vient de voir qu'il existe une unique solution y_J du problème de Cauchy sur chaque J. On pose alors pour $t \in I$, $y(t) = y_J(t)$ où J est tel que $t \in J$. Le choix de J est sans importance puisque si J_1, J_2 compacts de I contiennent t, alors y_{J_1}, y_{J_2} sont solutions du problème de Cauchy sur $J_1 \cap J_2$, donc coïncident par unicité sur cet intervalle compact.

  La fonction y alors définie est solution de $y' = f(t, y)$ (car coïncide localement avec une solution) et vérifie $y(t_0) = y_0$. On a donc bien existence d'une solution.

- Pour l'unicité, si y_1, y_2 sont deux solutions sur I tout entier, alors pour tout $t \in I$, on choisit J compact de I contenant t et t_0, sur lequel y_1, y_2 satisfont le même problème de Cauchy et donc coïncident par ce qui précède. Ainsi $y_1 = y_2$ et on a unicité de la solution sur I.

COMMENTAIRES

Il faut évidemment savoir ce qu'il se passe dans le cas plus général localement lipschitzien : il faut introduire la notion de cylindre de sécurité pour avoir une existence locale de solutions. On n'a plus d'existence globale, cependant on garde l'unicité en montrant que deux solutions définies sur un même intervalle coïncident sur cet intervalle grâce au résultat local.