51. Théorème de Bernstein

[Gou08, §4.4, p250–251]

Énoncé

Théorème. [Théorème de Bernstein]
Soit $a>0$ et $f:]-a,a[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout entier k, $f^{(2k)}\geq 0$ sur $]-a,a[$. Alors f admet un développement en série entière sur $]-a,a[$.

Développement

Notons tout d'abord qu'il suffit de montrer le résultat sur tout intervalle $]-b,b[$ avec $0<b<a$ (par unicité du développement en série entière sur un voisinage de 0, les coefficients du développement ne dépendront alors pas de b).

Fixons alors[1] $0<b<a$ et introduisons $F:[-b,b]\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto f(x)+f(-x)$.
C'est une fonction paire, donc ses dérivées d'ordre impairs s'annulent en 0. Par ailleurs pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $F^{(2n)}(x)=f^{(2n)}(x)+f^{(2n)}(-x)\geq 0$ et $F^{(2n)}(0)=2f^{(2n)}(0)$.

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,b[$, la formule de Taylor avec reste intégral (F est $\mathcal{C}^{2n+2}$) donne :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+R_n(x)$$

où $R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt$. Les termes de la somme étant positifs, on a nécessairement $0\leq R_n(b)\leq F(b)$. On veut montrer que $R_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Or :

$$\begin{aligned}0\leq R_n(x)&=\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(b-t)^{2n+1}}\frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt\\&\leq\left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1}\int_0^x\frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt\\&\leq\left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1}R_n(b)\leq\left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1}F(b)\end{aligned}$$

(la première inégalité provenant de la décroissance de $t\longmapsto\frac{x-t}{b-t}$ sur $[0,x]$).
Et donc $R_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ puisque $x\in[0,b[$.
En utilisant que F est paire, on obtient donc $\forall x\in]-b,b[, F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$.

[1] procéder ainsi permet notamment d'avoir l'existence de $f(b)$, ce qui va être très utile. Si f était définie sur $[-a,a]$, on n'aurait pas besoin d'introduire b

Procédons de même pour f. Soit $x\in]-b,b[$. On écrit

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x)\qquad\text{où } r_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+2)}(t)dt$$

$f^{(2n+2)}(t)\leq f^{(2n+2)}(t)+f^{(2n+2)}(-t)\leq F^{(2n+2)}(t)$ donc $0\leq r_n(x)\leq R_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Posant $S_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, on a donc que $S_{2n+1}(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$.

Reste à montrer que $S_{2n}(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$. Or, puisque $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}$ converge :

$$S_{2n}(x)-S_{2n-1}(x)=\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=\frac{1}{2}\frac{F^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, ce qui implique que $S_{2n}(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$.

Finalement on a $S_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$, ou encore $\forall x\in]-b,b[, f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Appliquons ce résultat à l'application $f=\tan'$. Cela nous donnera que f et donc $\tan$ sont développables en série entière sur $I=]-\pi/2,\pi/2[$. Vérifions pour cela que les dérivées d'ordre pairs de f sont positives sur I.
On va en fait montrer par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_k\in\mathbb{R}_+[X]$ tel que $f^{(2k)}(x)=P_k(\tan^2(x))\geq 0$.

- Pour $k=0$, on a $f=1+\tan^2$ donc $P_0=1+X$ convient.
- Soit $k\in\mathbb{N}$ tel qu'il existe P_k satisfaisant.
  Soit $x\in I$. On a $f^{(2k)}(x)=P_k(\tan^2(x))$, donc (en posant $v=\tan(x)$) :

$$\begin{aligned}f^{(2k+1)}(x)&=2(1+v^2)vP_k'(v^2)=2(v+v^3)P_k'(v^2)\\f^{(2k+2)}(x)&=\underbrace{2(1+v^2+3(1+v^2)v^2)P_k'(v^2)+2(v+v^3)\times 2(1+v^2)vP_k''(v^2)}_{P_{k+1}(v^2)}\end{aligned}$$

  P_{k+1} est satisfaisant.

D'où le résultat par récurrence.