# 50. Théorème de BANACH-STEINHAUS et série de FOURIER divergente

[Bre99, II.1, p16–17] [Gou08, An. A, p404–405]

## ÉNONCÉ

**THÉORÈME. [THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS]**
*Soit $E$ un espace de BANACH et $F$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}_c(E,F)$ simplement bornée (c'est-à-dire $\forall x\in E, \sup_{i\in I}\|u_i(x)\|\le+\infty$). Alors $\sup_{i\in I}|||u_i|||<+\infty$.*

**APPLICATION.** Existence d'une fonction continue $2\pi$-périodique telle que sa série de FOURIER diverge en 0.

## DÉVELOPPEMENT

Commençons par montrer le théorème. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, introduisons

$$E_k=\{x\in E\,|\,\forall i\in I, \|u_i(x)\|_F\le k\}=\cap_{i\in I}\|u_i\|_F^{-1}([0,k])$$

qui est fermé en tant qu'intersection de fermés car les $(u_i)_{i\in I}$ sont continues. Par hypothèse, chaque élément $x$ de $E$ appartient à l'un de ces ensembles et donc $E=\cup_{k\in\mathbb{N}}E_k$.
Comme l'union des $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est d'intérieure non vide, le théorème de BAIRE implique que l'un au moins des $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est d'intérieur non vide, notons le $E_K$.
Soit $\overline{B}(a,r)$ une boule fermée[1] incluse dans $E_K$.
Soit $x\in E$. Alors $y=a+r\frac{x}{\|x\|_E}\in\overline{B}(a,r)$, d'où pour tout $i\in I$ :

$$\|u_i(x)\|_F=\left\|u_i\left(\frac{\|x\|_E}{r}(y-a)\right)\right\|_F=\frac{\|x\|_E}{r}\|u_i(y-a)\|_F$$
$$\le\frac{\|x\|_E}{r}(\|u_i(y)\|_F+\|u_i(a)\|_F)\le\frac{2K}{r}\|x\|_E$$

Et ainsi $\sup_{i\in I}|||u_i|||\le\frac{2K}{r}$, ce qui démontre le théorème.

Passons à l'application. Condidérons

$$\begin{array}{rccc}\ell_N: & \mathcal{C}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & f & \longmapsto & \sum_{n=-N}^N c_n(f)=S_N(f)(0)\end{array}$$

- $\ell_N$ est linéaire par linéarité des coefficients de FOURIER et pour $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ :

$$|\ell_N(f)|=|D_N*f(0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_N(t)|\,|f(-t)|\,dt\le\|f\|_\infty\|D_N\|_1$$

Donc $\ell_N$ est continue et $|||\ell_N|||\le\|D_N\|_1$.

- Posons $f_\varepsilon=\frac{D_N}{|D_N|+\varepsilon}\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\ell_N(f_\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\|D_N\|_1$ puisque par parité de $D_N$ on a

$$D_N*f_\varepsilon(0)=\int_0^{2\pi}\frac{|D_N(t)|^2}{D_N(t)^2+\varepsilon}dt\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\int_0^{2\pi}|D_N(t)|\,dt$$

la limite s'obtenant par convergence dominée (on domine par $|D_N(t)|$).
Comme $\|f_\varepsilon\|_\infty\le1$, on a donc $|||\ell_N|||=\|D_N\|_1$.

- Montrons que $\|D_N\|_1\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\|D_N\|_1&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\right|dt\ge\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{t/2}\right|dt && \text{puisque } |\sin(t/2)|\le|t/2|\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi/2}\frac{|\sin(u)|}{u}du && \text{par CDV } u=\frac{(2N+1)t}{2}\\&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\end{aligned}$$

En effet :

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin(u)|}{u}du=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}du$$
$$\ge\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi|\sin(u)|\,du=\frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=+\infty$$

- $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est complet car fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui est complet.
Le théorème de BANACH-STEINHAUS donne alors, puisque $\sup_{N\in\mathbb{N}}|||\ell_N|||=+\infty$, l'existence de $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\sup_{N\in\mathbb{N}}|\ell_N(f)|=+\infty$.
Autrement dit, la série de FOURIER de $f$ diverge en $0$ et donc en particulier, la série de FOURIER de $f$ diffère de $f$.

## COMMENTAIRES

Attention à introduire la bonne fonction $\ell_N$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et égale à $S_N(f)$ en 0 (ne pas faire intervenir de fonction $e_i=\exp(i\pi.)$ !). Faire attention à la constante $1/2\pi$ dans les calculs, et à la fin bien préciser que $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est complet !

1. on la suppose fermée quitte à réduire $r$ !