59. Théorèmes d'Abel et taubérien faible

[Gou08, §4.4, p252–254]

ÉNONCÉ

Théorème. [Théorème d'Abel]
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Alors pour tout $\alpha \in [0, \pi/2[$, on a $\lim_{z\to 1, z\in\Delta_\alpha} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n$, où

$$\Delta_\alpha = \{1 - \rho\, \mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{D}(0,1) \mid \rho > 0, \theta \in [-\alpha, \alpha]\}$$

Théorème. [Théorème taubérien faible]
Soit $f : z \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $a_n = o(1/n)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \longrightarrow_{x\to 1^-} S$. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$.

DÉVELOPPEMENT

Commençons par montrer le théorème d'Abel. Fixons $\alpha \in [0, \pi/2[$.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a pour z tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n(z^n - 1)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) = (z-1)\sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)\end{aligned}$$

Et donc en passant à la limite on obtient $f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$.

Fixons alors $\varepsilon > 0$ puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour $n > N$. Il vient pour z tel que $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n z^n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n\right) \leq |z-1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Prenons désormais $z = 1 - \rho\, \mathrm{e}^{i\theta} \in \Delta_\alpha$ avec $\rho \leq \cos(\alpha)$ [1]. On a puisque $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2$:

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{2\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2} \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \leq \frac{2}{2\cos(\alpha) - \cos(\alpha)} \leq \frac{2}{\cos(\alpha)}$$

1. c'est ici que l'on a besoin de se réduire au domaine Δ_α. Si on ne considérait que le disque entier, on n'aurait pas cette majoration pour tous les z proches de 1 car on pourrait prendre $\theta \to \pm\pi/2$

Prenons $M > 0$ tel que $M\sum_{n=0}^N |R_n| \leq \varepsilon$. Alors si $\rho \leq M$, l'inégalité précédente donne $|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos(\alpha)}$.
Ainsi on a montré qu'au voisinage de 1 dans Δ_α, on a $|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos(\alpha)}$.
Le raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient le résultat.

Passons au théorème taubérien faible. On note encore $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, on a $(1 - x^k) = (1-x)\sum_{i=0}^{k-1} x^i \leq k(1-x)$, d'où :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, S_n - f(x) &= \sum_{k=1}^n a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^\infty a_k x^k\\ |S_n - f(x)| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k|\, k(1-x) + \sum_{k=n+1}^\infty \frac{k}{n}|a_k|\, x^k\\ &\leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k\,|a_k|}{n}\sum_{k=n+1}^\infty x^k \quad \text{où } M = \sup_{k>0} k\,|a_k|\\ &\leq (1-x)Mn + \frac{\sup_{k>n} k\,|a_k|}{n(1-x)}\end{aligned}$$

(M est fini par hypothèse).

Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, |S_n - f(1-\varepsilon/n)| \leq M\varepsilon + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{\varepsilon}$.
Et donc pour $n \geq N_0$ assez grand, puisque $a_n = o(1/n)$:

$$|S_n - f(1-\varepsilon/n)| \leq \varepsilon(M+1)$$

Par ailleurs, on peut choisir N_1 tel que $|S - f(1-\varepsilon/n)| < \varepsilon$ pour $n \geq N_1$ (puisque $f(x) \longrightarrow_{x\to 1^-} S$) et alors par inégalité triangulaire

$$\forall n \geq \max(N_0, N_1), |S_n - S| \leq \varepsilon(M+2)$$

Le raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est S.

COMMENTAIRES

Il faut faire un dessin de Δ_α.