22. Suites de polygones

[Gou09, §4.2, p180]

ÉNONCÉ

Lemme. [Déterminant circulant]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}\right) = \prod_{0\le \ell\le n-1} Q(\omega^\ell) \quad \text{où} \quad \begin{cases} Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}X^i \\ \omega = \exp(2i\pi/n) \end{cases}$$

Proposition. [Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre]
On définit par récurrence une suite $(P^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par $P^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$ et $P^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)}+z_2^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)}+z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)}+z_1^{(k)}}{2}\right)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Alors $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (g, g, \dots, g)$ où $g = \mathrm{Isobar}(z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$.

DÉVELOPPEMENT

Commençons par le lemme. Posons $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ puis :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j\le n}$$

Remarquons que Ω est une matrice de Vandermonde de déterminant non nul puisque les $(\omega^i)_{0\le i\le n-1}$ sont tous distincts. Soit alors $A = Q(J)$ où $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}X^i$. Calculons :

$$A\Omega = \begin{pmatrix} Q(1) & Q(\omega) & \dots & Q(\omega^{n-1}) \\ Q(1) & \omega Q(\omega) & \dots & \omega^{n-1}Q(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q(1) & \omega^{n-1}Q(\omega) & \dots & \omega^{(n-1)^2}Q(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, on a donc :

$$\det(A\Omega) = Q(1)Q(\omega)\dots Q(\omega^{n-1})\det(\Omega)$$

Et alors $\det(A) = \prod_{0\le\ell\le n-1} Q(\omega^\ell)$ puisque $\det(\Omega) \neq 0$.

Passons à la proposition.
Remarquons que $P^{(k+1)} = AP^{(k)}$ où $A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J$, et alors il est immédiat de vérifier que $P^{(k)} = A^kP^{(0)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Etudions donc la matrice A en cherchant ses valeurs propres. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, le lemme donne :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)I - \frac{1}{2}J\right) = \prod_{\ell=0}^{n-1}\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\omega^\ell\right) = \prod_{\ell=0}^{n-1}\left(\lambda - \frac{1+\omega^\ell}{2}\right)$$

Les valeurs propres de A sont donc les $(\lambda_\ell)_{0\le\ell\le n-1} = \left(\frac{1+\omega^\ell}{2}\right)_{0\le\ell\le n-1}$. Elles sont toutes distinctes donc A est diagonalisable. Ecrivons $A = RDR^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$. En remarquant que $|\lambda_\ell| < 1$ pour $1 \le \ell \le n-1$, on en déduit que :

$$A^k = RD^kR^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} R\,\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)R^{-1}$$

puis $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} R\,\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)R^{-1}P^{(0)} = P^{(\infty)}$.

$P^{(\infty)}$ est alors un point fixe de A, c'est-à-dire un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Comme le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1 et contient $(1, \dots, 1)$, il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P^{(\infty)} = (g, \dots, g)$$

Reste à remarquer que $\mathrm{Isobar}(P^{(k+1)}) = \mathrm{Isobar}(P^{(k)}) = \dots = \mathrm{Isobar}(P^{(0)})$ par associativité des barycentres et donc

$$g = \mathrm{Isobar}((g, \dots, g)) = \mathrm{Isobar}(P^{(\infty)}) = \lim_{k\to+\infty}\mathrm{Isobar}(P^{(k)}) = \mathrm{Isobar}(P^{(0)})$$

le passage à la limite étant justifié par continuité de l'application $(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i$.

COMMENTAIRES

On pourra insister sur l'intuition géométrique, en assimilant la suite $(P^{(k)})_k$ a une suite de polygones définis par leurs sommets, via l'assimilation entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

Attention, seul le lemme est dans le [Gou09]. La proposition n'est pas référencée, elle doit donc être bien maitrisée. Un exercice similaire est cependant proposé dans le [FGN07b, §1.22, p45].