48. Stabilité de Liapounov

[Ber17, §6.2, p239] [Rou99, §3.3, p127]

ÉNONCÉ

Théorème. [Stabilité de Liapounov]
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Si les valeurs propres de $A = Df(0)$ sont toutes de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système $y' = f(y)$.

DÉVELOPPEMENT

- Soit z une solution de $z' = Az$. Posons $a = \min_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} -\Re(\lambda) > 0$.
  Montrons qu'il existe $C > 0$ telle que $\|z(t)\| \leq C\,\mathrm{e}^{-at/2}\,\|z(0)\|$.
  On sait par le lemme des noyaux que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \ker(A - \lambda\,\mathrm{id})^{m_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} E_\lambda$.
  On peut donc décomposer de manière unique $z(0) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} z_\lambda$ où $z_\lambda \in E_\lambda$. Alors :
  $$\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{tA}\, z = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{e}^{tA}\, z_\lambda \qquad \text{où} \qquad \mathrm{e}^{tA}\, z_\lambda = \mathrm{e}^{t\lambda}\, \mathrm{e}^{t(A-\lambda\,\mathrm{id})}\, z_\lambda$$
  et $\mathrm{e}^{t(A-\lambda I)}\, z_\lambda = \left(\sum_{0\leq p<m_\lambda} \frac{t^p}{p!}(A-\lambda I)^p\right) z_\lambda$ puisque $(A-\lambda I)^p z_\lambda = 0$ pour $p \geq m_\lambda$.
  Fixons $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il est facile de vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{tA}\, z_\lambda \in E_\lambda$, d'où
  $$\left|\left|\left|\mathrm{e}^{tA}_{|E_\lambda}\right|\right|\right| \leq \mathrm{e}^{t\Re(\lambda)}\, C_\lambda (1+|t|)^{m_\lambda-1} \leq \mathrm{e}^{-at}\, C(1+|t|)^{n-1}$$
  pour des constantes C_λ puis C réelles. Et donc
  $$\|z(t)\| = \left\|\sum_\lambda \mathrm{e}^{tA}\, z_\lambda\right\| \leq \sum_\lambda \left\|\mathrm{e}^{tA}\, z_\lambda\right\| \leq \sum_\lambda \left|\left|\left|\mathrm{e}^{tA}_{|E_\lambda}\right|\right|\right| \|z_\lambda\| \leq C(1+|t|)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at} \sum_\lambda \|z_\lambda\|$$
  $z \longmapsto \sum_\lambda \|z_\lambda\|$ étant une norme, on obtient le résultat quitte à modifier C.
- D'après ce qui précède, les solutions de $z' = Az$ convergent vers 0 à vitesse exponentielle. Ainsi 0 est un point d'équilibre attractif.
  On voudrait montrer le même comportement localement pour le système non linéaire.
  Considérons alors, pour $u, v \in \mathbb{C}^n$, $b(u,v) = \int_0^{+\infty} \langle \mathrm{e}^{tA}\, u \mid \mathrm{e}^{tA}\, v\rangle dt$ puis $q(u) = b(u,u)$.
  Ces applications sont bien définies puisque, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\langle \mathrm{e}^{tA}\, u \mid \mathrm{e}^{tA}\, v\rangle\right| \leq \left\|\mathrm{e}^{tA}\, u\right\| \left\|\mathrm{e}^{tA}\, v\right\| \leq C^2\,\mathrm{e}^{-at}\,\|u\|\,\|v\|$, donc l'intégrale est absolument convergente. b est alors bilinéaire symétrique et q est clairement une forme quadratique définie positive, donc b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
  Remarquons que q est différentiable et $dq(u)(v) = 2b(u,v)$.

  Soit y une solution de l'équation différentielle $y' = f(y)$.

  Introduisons, pour $u \in \mathbb{R}^n$, $r(u) = f(u) - Au = o(\|u\|)$ puisque f est $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$.
  On veut montrer que $q(y)' \leq -\beta q(y)$ pour une constante $\beta > 0$ et lorsque $y(t)$ est assez proche de 0. Or par bilinéarité de b on a :
  $$q(y)' = dq(y)(y') = 2b(y,y') = 2b(y,f(y)) = 2b(y,Ay) + 2b(y,r(y))$$
  Or d'une part pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:
  $$\langle \nabla q(u) \mid Au\rangle = 2b(u,Au) = \int_0^{+\infty} 2\langle \mathrm{e}^{tA}\, u \mid \mathrm{e}^{tA}\, Au\rangle dt = \left[\left\|\mathrm{e}^{tA}\, u\right\|^2\right]_0^{+\infty} = -\|u\|^2$$
  Remarquons que $\sqrt{q}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ équivalente à $\|.\|$. Donc il existe $C' > 0$ telle que $C'q(y) \leq \|y\|^2$ et alors :
  $$q(y)' \leq -C'q(y) + 2b(y,r(y))$$
  Par ailleurs, l'équivalence des normes donne que $r(u) = o(\sqrt{q(u)})$ et donc :
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall u \in \mathbb{R}^n, \sqrt{q(u)} \leq \eta \Longrightarrow \sqrt{q(r(u))} \leq \varepsilon\sqrt{q(u)}$$
  Fixons $\varepsilon > 0$. Soit η associé. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :
  $$\forall u \in \mathbb{R}^n, q(u) \leq \eta^2 \quad \Longrightarrow \quad |b(u,r(u))| \leq \sqrt{q(u)}\sqrt{q(r(u))} \leq \varepsilon q(u)$$
  D'où finalement lorsque $q(y) \leq \eta^2$:
  $$q(y)' = -(C' - 2\varepsilon)q(y) = -\beta q(y)$$
  où β est strictement positif pour ε assez petit[1].
- Supposons $q(y_0) \leq \eta^2$. Alors $q(y) \leq \eta^2$ pour tout $t \geq 0$.
  En effet, si ce n'est pas le cas, soit $t_0 > 0$ tel que $q(y(t)) > \eta^2$ sur $]t_0, t_0+\delta]$ et $q(y(t)) \leq \eta^2$ sur $[0, t_0]$. Alors $q(y(t_0)) = \eta^2$ donc $q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$ ce qui est contradictoire.
  Ainsi $q(y)' \leq -\beta q(y)$ sur $\mathbb{R}_+$, ou encore $(\mathrm{e}^{\beta t}\, q(y))' \leq 0$, et donc
  $$q(y(t)) \leq \mathrm{e}^{-\beta t}\, q(y_0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  Donc la solution y converge vers 0. Ainsi 0 est stable.

COMMENTAIRES

L'idée de la démonstration consiste à trouver une norme telle que $N(y(t)) \leq C\,\mathrm{e}^{-\beta t}$.

Le développement est long. Peut-être faut-il admettre le premier point, pour prendre le temps d'expliquer la fin, plus intéressante.

1. C' ne dépend par de ε !