20. Sous-groupes distingués et caractères. Table de $\mathfrak{S}_4$

[Pey04, §VIII.1.4/VIII.2.1, p228–232]

ÉNONCÉ

Soit G un groupe fini. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_r$ ses caractères irréductibles.

LEMME. *Soit χ associé à une représentation (ρ, V) de G. Alors* $\ker(\rho) = \ker(\chi) = \{g \in G \,|\, \chi(g) = \chi(1)\}$.

PROPOSITION. *Les sous-groupes distingués de G sont de la forme $\cap_{i\in I} \ker \chi_i$ où $I \subset [\![1, r]\!]$.*

APPLICATION. Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$.

DÉVELOPPEMENT

- Commençons par le lemme. On procède par double inclusion :
  - Si $\rho(g) = \rho(1) = \mathrm{id}$, alors $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}) = \dim(V) = \chi(1)$. Donc $\ker(\rho) \subset \ker(\chi)$.
  - Réciproquement, soit g tel que $\chi(g) = \chi(1) = \dim(V)$.
    $\rho(g)$ est diagonalisable, de valeurs propres des racines de l'unité $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ où $d = \dim(V)$. $\chi(g)$ en est la somme, donc s'il existe i tel que $\zeta_i \neq 1$, on a :
    $$\Re(\chi(g)) = \textstyle\sum_{i=1}^d \Re(\zeta_i) < d = \Re(\chi(1))$$
    ce qui est absurde. Donc $\rho(g)$ est diagonalisable avec pour seule valeur propre 1, c'est donc l'identité. Ainsi $g \in \ker(\rho)$. D'où l'inclusion réciproque.

- Passons à la proposition.
  Une intersection de groupes distingués est distinguée, donc tout sous-groupe du type $\cap_{i\in I} \ker \chi_i$ pour une partie I de $[\![1, r]\!]$ est distingué.

  Réciproquement, soit N distingué dans G. Pour $g \in G$, on note $\overline{g} = gN$.
  Notons $\mathbb{C}G/N = \mathrm{Vect}((e_{\overline{g}})_{g\in G})$ et considérons la représentation de G sur $\mathbb{C}G/N$:
  $$\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{C}G/N), g \longmapsto (e_{\overline{h}} \longmapsto e_{\overline{gh}})$$
  Alors $\ker(\rho) = \{g \in G \,|\, \forall h \in G, \overline{gh} = \overline{h}\} = \{g \in G \,|\, \forall h \in G, h^{-1}gh \in N\} = N$.

  Décomposons $\mathbb{C}G/N$ en somme de représentations irréductibles $\oplus_{j=1}^s V_j$. Notant θ_j le caractère de V_j, posons $a_i = \mathrm{card}(\{j \,|\, \theta_j = \chi_i\})$, de sorte que $\chi = \sum_{i=1}^r a_i\chi_i = \sum_{i\in I} a_i\chi_i$ en notant $I = \{i \,|\, a_i > 0\}$. Alors :
  $$N = \ker(\rho) = \cap_{j=1}^r \ker(\rho_{|V_j}) = \cap_{i\in I} \ker(\chi_i)$$

- Regardons maintenant la table de $\mathfrak{S}_4$ afin d'en déduire ses sous-groupes distingués.
  Il y a 5 classes de conjugaison : l'identité, 6 transpositions, 8 3-cycles, 3 bi-transpositions et 6 4-cycles.
  On sait donc qu'il y a 5 caractères irréductibles. Parmi eux, les caractères irréductibles de degré 1 sont le caractère trivial χ_1 et la signature χ_ε.
  De plus, $|\mathfrak{S}_4| = 24 = 1+1+4+9+9$ est la seule décomposition possible en somme de 5 carrés dont deux exactement valent 1, donc les caractères irréductibles restants sont de degré 2, 3 et 3.

  Pour commencer, regardons la représentation par permutation $\rho_{perm} : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ qui possède pour sous-représentation $\mathrm{Vect}((1,1,1,1))$. On a donc $\chi_{perm} = \chi_1 + \chi_3$ et alors on peut calculer $\chi_3(\sigma) = \mathrm{card}(\mathrm{Fix}(\sigma)) - 1$ sur chaque classe.
  On vérifie que $\langle \chi_3 \mid \chi_3 \rangle = 1$, et donc χ_3 est irréductible.

  Ensuite, on regarde la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C})$ le groupe des isométries positives du cube. Calculons sont caractère χ_c associé :
  - l'identité est envoyée sur l'identité, de trace 3,
  - une transposition est envoyée sur une rotation d'angle π d'axe passant par le milieu d'une arête, de trace -1,
  - un 4-cycle est envoyé sur une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'axe $(0x)$ par exemple, de trace 1,
  - une bi-transposition est envoyée sur une rotation d'angle π d'axe $(0x)$ par exemple, de trace -1,
  - un 3-cycle est envoyé sur une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par un sommet, de trace 0.

  Finalement, on a déterminé χ_c et on vérifie qu'il est irréductible. En utilisant l'orthogonalité sur les colonnes, on obtient enfin χ_2 le caractère irréductible de degré 2.

Type	(1, 1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1)	(4)	(2, 2)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_c	3	-1	0	1	-1
χ_2	2	0	-1	0	2

FIGURE 1 – Table des caractère de $\mathfrak{S}_4$

En appliquant la proposition, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ non triviaux sont donc le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ ainsi que le groupe des bi-transpositions.