17. Réduction de Jordan

[Rom17, Ch21, p672–675] [MM16, ChX, p111]

ÉNONCÉ

Théorème. [Décomposition de Jordan]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. Il existe des entiers $d_{j,1} \geq \cdots \geq d_{j,\ell_j}$ pour $j \in [\![1, r]\!]$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(B_{j,k})_{\substack{1\leq j\leq r\\ 1\leq k\leq \ell_j}}$, où $B_{j,k} = \lambda_j I_{d_{j,k}} + J_{d_{j,k}}$ en notant $J_d = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

DÉVELOPPEMENT

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q. Alors pour tout $x \in E$ tel que $f^{q-1}(x) \neq 0$, l'espace $E_{f,x} = \mathrm{Vect}(\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\})$ est f-stable et $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ en est une base.*

En effet, le plus petit sous-espace f-stable contenant x est $\mathbb{K}[f](x)$, et en remarquant que $f^n(x) = 0$ pour $n \geq q$, on a que $E_{f,x} = \mathbb{K}[f](x)$. Donc $E_{f,x}$ est f-stable et de dimension au plus q. Vérifions que la famille est libre.
Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq q-1} \in \mathbb{K}^q$ tels que $\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 = f^k(\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i f^i(x)) = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i f^{i+k}(x)$ par linéarité.
Prenant $k = q-1$, on a alors $\lambda_0 f^{q-1}(x) = 0$, et donc $\lambda_0 = 0$. Puis avec $k = q-2$, on obtient de même $\lambda_1 = 0$. De même jusqu'à $k = 0$, on obtient que les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq q-1}$ sont tous nuls, et donc que la famille est libre. Comme elle est génératrice, c'est une base de $E_{f,x}$.

Intéressons-nous maintenant au cas où f est nilpotent :

Lemme. [Décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Il existe des entiers $d_1 \geq \cdots \geq d_\ell$ tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E, $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale par blocs avec les blocs $(J_{d_k})_{1\leq k\leq \ell}$.

Procédons par récurrence forte sur $n = \dim(E)$:

- Pour $n = 1$, on a que f est l'endomorphisme nul et donc le résultat est vrai.
- Soit $n \geq 2$ tel que le résultat est vrai en dimensions inférieures.
  Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre q. On peut supposer $2 \leq q \leq n$, car si $q = 1$, f est nul et si $q = n$, prenant x satisfaisant le Lemme, on a que $E_{f,x} = E$ et donc que la matrice de f dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est J_n.

  Sinon, on cherche une décomposition de E en sous-espaces stricts stables afin d'appliquer le Lemme.
  Considérons $x \in E$ comme dans le Lemme. Cherchons un supplémentaire stable par f. Complétons $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ (on a $e_q = f^{q-1}(x)$) et posons $F = \{y \in E \,|\, \forall j \in \mathbb{N}, e_q^*(f^j(y)) = 0\} = \cap_{j<q} \ker(e_q^* \circ f^j)$ puisque $f^q = 0$, de sorte que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n-q$. De plus F est clairement f-stable.

  Vérifions que $E_{f,x} \cap F = \{0\}$. Soit $y = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i f^i(x) \in E_{f,x} \cap F$. On a $0 = e_q^*(y) = \lambda_{q-1}$, puis $0 = e_q^*(f(y)) = \lambda_{q-2}$, et ainsi de suite jusqu'à $0 = e_q^*(f^{q-1}(y)) = \lambda_0$. Donc $E_{f,x} \cap F = \{0\}$.
  Ce qui implique $\dim(F) \leq n-q$ et donc par ce qui précède $\dim(F) = n-q$.

  On a alors la décomposition en sous-espaces stables $E = E_{f,x} \oplus F$. La matrice de $f_{E_{f,x}}$ dans la base $(x, \dots, f^{q-1}(x))$ est J_q, et en appliquant l'hypothèse de récurrence à f_F, on obtient en concaténant la décomposition souhaitée.

D'où finalement le résultat par récurrence.

Revenons au cas général où f est de polynôme caractéristique scindé.
Ecrivons $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$. Par la lemme des noyaux, on a que $E = \bigoplus_{k=1}^r \ker(f - \lambda_k \,\mathrm{id})^{\alpha_k} = \bigoplus_{k=1}^r N_k$ est une décomposition en sous-espaces f-stables de E.
En appliquant la décomposition démontrée précédemment à la famille d'endomorphismes nilpotents $(f_{N_k} - \lambda_k \,\mathrm{id}_{N_k})_{1\leq k\leq r}$, on obtient la décomposition souhaitée dans la base de E concaténant les bases $(\mathcal{B}_k)_{1\leq k\leq r}$ trouvées.