

18. Réduction des endomorphismes normaux

[Gou09, §5.3, p258] [Rom17, §22.10, p728]

ÉNONCÉ

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

PROPOSITION. Supposons $n = \dim(E) = 2$. Alors :

- soit u a une valeur propre réelle, et alors u est diagonalisable dans une b.o.n.,
- soit la matrice de u dans une b.o.n. est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

THÉORÈME. [RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX]

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ & & & R_r \end{pmatrix}$$

où $p + 2r = n$, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$ et pour $1 \leq k \leq r$, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$.

DÉVELOPPEMENT

- Montrons d'abord que si F est u -stable alors $F^\perp$ est u^* -stable.

Soit en effet $x \in F^\perp$. On a :

$$\forall y \in F, \langle y | u^*(x) \rangle = \langle u(y) | x \rangle = 0 \quad \text{puisque } u(y) \in F$$

Donc $u^*(x) \in F^\perp$.

- Si maintenant $F = E_\lambda$ est un sous-espace propre de u , alors $E_\lambda^\perp$ est u -stable.
En effet, E_λ est stable par u , donc par u^* puisque ces deux endomorphismes commutent. Mais alors $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^\perp)^\perp = u$ par ce qui précède.
- Traitons désormais le cas $\dim(E) = 2$.
 - Si u a une valeur propre réelle λ , soit e_1 un vecteur propre normé. Alors si $u \neq \lambda \text{id}$, $\mathbb{R}e_1 = E_\lambda$ donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite engendrée par un vecteur e_2 normé stable par u par le point précédent donc un sous-espace propre, et alors $M_{(e_1, e_2)}(u)$ est diagonale, avec (e_1, e_2) orthonormée.
 - Si u n'a pas de valeur propre réelle, écrivons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une

base orthonormée de E . u est normal donc $M^\top M = MM^\top$, ce qui donne $a^2 + c^2 = a^2 + b^2$ et $ab + cd = ac + bd$.

Si $b = c$, alors M est symétrique, donc admet une valeur propre réelle¹, ce qui est absurde. Donc $c = -b$, avec $b \neq 0$ sinon M serait diagonale, et donc $d = a$, ou encore

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- Passons maintenant à la preuve du théorème, par récurrence forte sur $n = \dim(E)$:

– Si $n = 1$, le résultat est évident et on vient de traiter le cas $n = 2$.

– Supposons $n \geq 3$ et le résultat vrai en dimension inférieure à n .

Si u admet une valeur propre réelle λ_1 , alors $E_{\lambda_1}^\perp$ est stable par u , on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{E_{\lambda_1}^\perp}$, et on obtient le résultat en concaténant une base orthonormée de E_{λ_1} avec la base obtenue, qui reste bien orthonormée.

Sinon, soit Q un facteur irréductible de χ_u . Il est de degré 2. $\ker Q(u)$ est alors non nul. En effet écrivons $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, alors si M est la matrice de u dans une base, λ est valeur propre de M donc :

$$\det(Q(M)) = \det(M - \lambda I_n) \det(M - \bar{\lambda} I_n) = 0$$

Donc $Q(u)$ est non inversible.

Soit $v = u|_{\ker Q(u)}$. Alors v^*v est symétrique donc² admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Soit x un vecteur propre associé et $F = \text{Vect}(x, u(x)) = \text{Vect}(u(x), u^2(x))$. F est stable par u , de dimension 2. Vérifions que F est stable par u^* . En effet :

$$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \mu x \in F \quad \text{et} \quad u^*(u^2(x)) = u(u^*(u(x))) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{F^\perp}$ et le cas $n = 2$ à $u|_F$, ce qui donne le résultat voulu dans la base concaténée.

1. notons que dans ce cas, pas besoin d'invoquer la réduction des endomorphismes symétriques : il suffit de calculer le polynôme caractéristique de la matrice et de voir que ces deux racines sont réelles
2. là encore on utilise seulement que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles