# 47. Prolongement holomorphe de $\Gamma$ [BMP05, §2.7, p82] [QZ13, §IX.II.1, p312]

## ÉNONCÉ

**PROPOSITION.** *$\Gamma$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$.*

**APPLICATION.** $\Gamma$ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

**APPLICATION.** $\forall z \in \Omega_0, \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ **[FORMULE DE GAUSS]**

## DÉVELOPPEMENT

Commençons par montrer que $\Gamma$ est bien définie et holomorphe sur $\Omega_0 = \{\Re(z) > 0\}$.
On va appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral à la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega_0 \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{(z-1)\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

- Pour $z \in \Omega_0$, $f(z,.)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue),
- Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(.,t)$ est holomorphe sur $\Omega_0$,
- Pour $z \in \Omega_0$ tel que $\Re(z) \in ]\varepsilon, M[$ avec $0 < \varepsilon < M < +\infty$, on a pour $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$|f(z,t)| = \mathrm{e}^{(\Re(z)-1)\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t} \leq \begin{cases} \mathrm{e}^{(\varepsilon-1)\ln(t)} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si } t \leq 1 \\ \mathrm{e}^{(M-1)\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t} = t^{M-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

L'hypothèse de domination est ainsi vérifiée[1] sur tout compact de $\Omega_0$.

Ainsi $\Gamma$ est holomorphe sur $\Omega_0$.

On va maintenant prolonger $\Gamma$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.
Soit $z \in \Omega_0$. Une intégration par parties donne :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = [-t^z\,\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} zt^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = z\int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = z\Gamma(z)$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Il vient par récurrence immédiate :

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = \dots = (z+n-1)\dots z\Gamma(z)$$

1. on vérifie que la fonction dominatrice est bien intégrable

Définissons alors $\Gamma_n : z \longmapsto \dfrac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\dots z}$.
$\Gamma_n$ est bien définie et holomorphe sur $\Omega_n = \{\mathrm{Re}(z) > -n\} \setminus \{0, -1, \dots, -(n-1)\}$. Comme $\Gamma_n$ coïncide avec $\Gamma$ sur $\Omega_0$, c'est un prolongement holomorphe de $\Gamma$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n$ et $\Gamma_m$ coïncident sur $\Omega_m \cap \Omega_n$ par le théorème de prolongement analytique. Ainsi on peut définir un unique prolongement analytique de $\Gamma$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ en posant $\Gamma(z) = \Gamma_n(z)$ où $n$ est tel que $z \in \Omega_n$. Il vient alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega_{n+1}$ :

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots z} \underset{z\to-n}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Donc $\Gamma$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles les entiers $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$, tous simples de résidu $(-1)^n/n!$.

Passons à la formule de GAUSS.
Fixons $z \in \Omega_0$. Par le théorème de convergence dominée, il vient :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{z-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt = \lim_{n\to+\infty} I_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant $n$ fois par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\frac{t^z}{z}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\Big]_0^n + \frac{n}{nz}\int_0^n t^z\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^{n-1}dt = \frac{n}{nz}\frac{n-1}{n(z+1)}\int_0^n t^{z+1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^{n-2}dt \\ &= \frac{n}{nz}\frac{n-1}{n(z+1)}\cdots\frac{1}{n(z+n-1)}\int_0^n t^{z+n-1}dt = \frac{n}{nz}\frac{n-1}{n(z+1)}\cdots\frac{1}{n(z+n-1)}\frac{n^{z+n}}{z+n} \\ &= \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \end{aligned}$$

D'où la formule.

## COMMENTAIRES

Cette version diffère beaucoup de la référence. Il est conseillé de faire un dessin de $\Omega_n$.

Le jury insiste particulièrement sur la longueur de ce développement ! Il faut démontrer tout ce qui est annoncé, et donc bien savoir le temps que tout cela prend ! Par ailleurs il faut bien maîtriser les questions autour de la convergence de séries holomorphes/méromorphes.

On peut notamment appliquer la formule de GAUSS pour montrer que le prolongement de $\Gamma$ ne s'annule pas et que de plus $1/\Gamma$ est une fonction entière.