

46. Projection sur un convexe fermé et théorème de RIESZ-FRÉCHET

[Bre99, Ch5, p79–82]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ]

Soit C un convexe fermé d'un espace de HILBERT H . Alors :

$$\forall x \in H, \exists! p \in C \mid \|x - p\| = d(x, C)$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant $\forall c \in C, \Re(\langle x - p \mid c - p \rangle) \leq 0$.

COROLLAIRE. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$.

THÉORÈME. [THÉORÈME DE RIESZ-FRÉCHET]

Soit H un espace de HILBERT. Alors pour toute application $\phi \in H'$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f \mid v \rangle$.

De plus $\phi \mapsto f$ est une isométrie ($\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$).

DÉVELOPPEMENT

Commençons par montrer le théorème de projection. Fixons $x \in H$ et notons $d = d(x, C)$.

- Existence : considérons une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $d_n = \|x - c_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$.

On va montrer qu'elle est de CAUCHY. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|c_p - c_q\|^2 &= \|(c_p - x) - (c_q - x)\|^2 \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - \|(c_p - x) + (c_q - x)\|^2 \quad \text{par l'in. du parallélogramme} \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - 4 \left\| \frac{c_p + c_q}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2(d_p^2 + d_q^2) - 4d^2 \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } \frac{c_p + c_q}{2} \in C \text{ par convexité} \end{aligned}$$

Donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY, elle converge dans C complet vers un point p et $\|x - p\| = d$.

- Unicité : soient $c_1, c_2 \in C$ satisfaisants. Alors en posant $c = \frac{c_1 + c_2}{2} \in C$:

$$d^2 \leq \|x - c\|^2 = 2 \left(\left\| \frac{x - c_1}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - c_2}{2} \right\|^2 \right) - \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 = d^2 - \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2$$

Donc $c_1 = c_2$.

- Soit $a \in C$. Pour $c \in C$ et $t \in [0, 1]$, on a $(1 - t)a + tc \in C$ donc :

$$\begin{aligned} \forall c \in C, \forall t \in [0, 1], \|x - ((1 - t)a + tc)\|^2 &\geq \|x - a\|^2 \\ \iff \forall c \in C, \forall t \in [0, 1], \|x - a - t(c - a)\|^2 &\geq \|x - a\|^2 \\ \iff \forall c \in C, \forall t \in [0, 1], \|x - a\|^2 - 2t\Re(\langle x - a \mid c - a \rangle) + t^2\|c - a\|^2 &\geq \|x - a\|^2 \\ \iff \forall c \in C, \forall t \in [0, 1], -2\Re(\langle x - a \mid c - a \rangle) + t\|c - a\|^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si $a = p$, on a bien $\Re(\langle x - p \mid c - p \rangle) \leq 0$ en prenant $t \rightarrow 0$.

Réciproquement, si a satisfait $\Re(\langle x - a \mid c - a \rangle) \leq 0$, alors on peut remonter dans les équivalences et prendre $c = p, t = 1$ pour obtenir $d = \|x - p\| \geq \|x - a\|$, donc $a = p$.

Pour le corollaire, on peut déduire facilement du dernier point que la projection p sur F d'un point $x \in H$ vérifie $\forall c \in F, \langle x - p \mid c \rangle = 0$ donc $x = p + (x - p) \in F + F^\perp$.

On a bien $H = F \oplus F^\perp$.

Reste à montrer le théorème de RIESZ-FRÉCHET.

- Pour l'existence, soit $\phi \in H'$. Remarquons d'abord que $v = 0$ convient pour $\phi = 0$. Sinon, on peut poser $E = \ker(\phi) = \phi^{-1}(\{0\})$ qui est un hyperplan strict de H puisque $\phi|_{\ker(\phi)^\perp}$ est linéaire, injective et non nulle. E est fermé puisque ϕ est continue. On peut donc considérer $b \in E^\perp$ tel que $\phi(b) = 1$. Pour $x = \lambda b \in \mathbb{K}$, on a alors $\phi(x) = \lambda = \langle x \mid v \rangle$ en posant $v = b/\|b\|^2$, et pour $x \in \ker(\phi)$, on a $\phi(x) = 0 = \langle x \mid v \rangle$. Comme $H = E \oplus E^\perp$ par le corollaire on a finalement $\phi = \langle \cdot \mid v \rangle$.
- Pour l'unicité, il suffit de remarquer que $v \mapsto \langle \cdot \mid v \rangle$ est linéaire et de noyau nul.

L'égalité des normes provient de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (avec égalité pour $y = v$).

1. en effet pour tout $t \in \mathbb{K}, \Re(\langle x - p \mid tc - p \rangle) \leq 0$ et donc en prenant $t \in \mathbb{R}$ (puis $t \in i\mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on obtient $\langle x - p \mid c \rangle = 0$