45. Processus de branchement de Galton-Watson

[CDGM16, ChIII, p68–72]

Énoncé

Proposition. *Soient $(X_i^j)_{i,j\geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note μ leur loi, m leur espérance et on définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. et enfin $\rho = \mathbb{P}(\exists n \geq 0 \,|\, Z_n = 0)$. Alors si $\mu \neq \delta_1$, on a :*

- *si $m \leq 1$, $\rho = 1$ et on a extinction du processus presque surement,*
- *si $m > 1$, $\rho < 1$ et il y a une probabilité strictement positive de survie.*

Développement

Montrons que g_μ est croissante et convexe sur $[0,1]$, et strictement convexe si $\mu([2,+\infty[) > 0$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $p_k = \mu(\{k\})$. Les $(p_k)_k$ sont positifs, donc g_μ est croissante sur $[0,1]$. g_μ est une série entière convergente en 1 donc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et pour $s \in [0,1[$ on a $g''(s) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0$, ainsi g_μ est convexe. Si $\mu([2,+\infty[) > 0$, il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$, donc la dernière inégalité est stricte pour $s \neq 0$, d'où la stricte convexité.

Montrons par récurrence que $g_{Z_n} = g_\mu^{\circ n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- On a $g_{Z_0}(s) = s^1 = s$ donc $g_{Z_0} = \mathrm{id}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $s \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned}
g_{Z_{n+1}}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{n+1}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{z=0}^{+\infty} s^{\sum_{i=1}^{z} X_i^{n+1}} \mathbb{1}_{Z_n = z}\right] \\
&= \sum_{z=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{z} X_i^{n+1}} \mathbb{1}_{Z_n = z}\right] && \text{par thm. de Fubini-Lebesgue} \\
&= \sum_{z=0}^{+\infty} \Big(\prod_{i=1}^{z} \mathbb{E}[s^{X_i^{n+1}}]\Big) \mathbb{P}(Z_n = z) && \text{par indépendance} \\
&= \sum_{z=0}^{+\infty} (g_\mu(s))^z \mathbb{P}(Z_n = z) = \mathbb{E}[g_\mu(s)^{Z_n}] \\
&= g_{Z_n} \circ g_\mu(s) = g_\mu^{\circ n+1}(s) && \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

- Remarquons que $\rho = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \mathbb{P}(Z_n = 0)$ puisque $(Z_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. ρ est alors un point fixe de g_μ.
  En effet, puisque $\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_{Z_n}(0) = g_\mu^{\circ n}(0)$, on a :

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} g_\mu^{\circ n}(0) = \lim_{n\to+\infty} g_\mu^{\circ n+1}(0) = g_\mu\big(\lim_{n\to+\infty} g_\mu^{\circ n}(0)\big) = g_\mu(\rho)$$

  la troisième égalité provenant de la continuité de g_μ.

- C'est en fait le plus petit point fixe de g_μ par croissance de g_μ. En effet si z est un point fixe, on a $0 \leq z$ et donc :

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} g_\mu^{\circ n}(0) \leq \lim_{n\to+\infty} g_\mu^{\circ n}(z) = z$$

Comme $m = g_\mu'(1)$, distinguons alors plusieurs cas :

$m > 1$ $g_\mu(1) = 1$ et $g_\mu'(1) > 1$ donc il existe $\eta < 1$ tel que $g_\mu(s) < s$ pour $s \in]\eta, 1[$. Comme $g_\mu(0) \geq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires donne qu'il existe un point fixe de g_μ pour un $s \in [0,\eta[$. Ainsi $\rho < 1$.

$m < 1$ g_μ est convexe donc reste au dessus de sa tangente, ce qui implique que 1 est le seul point fixe de g_μ. Donc $\rho = 1$.

$m = 1$ Comme $\mu \neq \delta_1$ et $m = 1$, il existe $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$. Donc g_μ est strictement convexe, elle reste au dessus de sa tangente et ne la touche qu'en 1. Donc $\rho = 1$.

Commentaires

Ce résultat reste vrai si $m = +\infty$! On pensera à faire un dessin dans les trois cas.

Il faut être à l'aise avec les propriétés de convexité : quand est-ce que l'on est au dessus de la tangente, strictement au-dessus ? ... et savoir le démontrer ! Le cas $m > 1$ n'utilise pas de convexité, mais un argument de convexité montre que ρ est l'unique point fixe de g_μ sur $[0,1[$.