43. Méthode de Newton

[Rou99, Ch4, p140]

ÉNONCÉ

Théorème. [Méthode de Newton]
Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$, où $c < d$, et telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. On considère la suite récurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors en notant a l'unique 0 de f, on a :

(i) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C\,|x_n - a|^2$.

(ii) si de plus $f'' > 0$ sur $[a,d]$, alors pour tout $x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim_{n\to+\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

DÉVELOPPEMENT

La définition de a découle de la stricte croissance de f et du théorème des valeurs intermédiaires.

(i) Notons $\varphi : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On a $\varphi(a) = a$ puis $\varphi'(a) = 0$ et

$$\varphi(x) - a = x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à f : il existe z_x entre x et a tel que

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(z_x)}{2}(a-x)^2$$

Ainsi $\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2$.

Prenons alors $C = \frac{1}{2}\frac{\max_{[c,d]} f''}{\min_{[c,d]} f''} > 0$ de sorte que $|\varphi(x) - a| \leq C(x-a)^2$.

En choisissant $\alpha < 1/C$ assez petit pour que $I = [a \pm \alpha] \subset [c,d]$, on a $|\varphi(x) - a| \leq C\alpha^2 \leq \alpha$ pour tout $x \in I$, de sorte que I est φ-stable.

Prenant $x_0 \in I$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C\,|x_n - a|^2$.
On en déduit par récurrence que $C\,|x_n - a| \leq (C\,|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a donc la convergence quadratique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a.

(ii) Si $a < x \leq d$, on a $f(x) > 0$ et donc $\varphi(x) < x$ et par ce qui précède :

$$\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 > 0$$

Ainsi $I = [a,d]$ est φ-stable et si $x_0 \in I$, la suite $(x_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc converge vers ℓ satisfaisant $\varphi(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$ et donc $\ell = a$. Ce que l'on a vu précédemment est toujours valable par stabilité de I, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Comme $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}$$

ce qui donne l'équivalent annoncé.

COMMENTAIRES

Faire des schémas dans les deux cas : pour le premier avec une fonction qui nécessite bien un intervalle I proche du point fixe, sinon la méthode ne converge pas, et pour le second dans le cas où tout se passe bien puisque $f'' > 0$.

Voir aussi [Dem96, §IV.2.3, p98–100].