13. Isomorphisme $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ [CG13, §VII.3, p232]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. *On a* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

DÉVELOPPEMENT

RAPPEL. On identifie $\mathbb{H}$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ via $h = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ où $a = x + iy, b = -z + it$.
Si $h = x+y\mathrm{i}+z\mathrm{j}+t\mathrm{k} \in \mathbb{H}$, on pose $\overline{h} = x-y\mathrm{i}-z\mathrm{j}-t\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ et $N(h) = h\overline{h} = x^2+y^2+z^2+t^2$ qui définit une norme sur $\mathbb{H}$, de forme bilinéaire symétrique associée :

$$\forall h, h' \in \mathbb{H}, \langle h \mid h' \rangle = \frac{1}{2}(h\overline{h'} + h'\overline{h})$$

Enfin on note $\mathbb{I} = \mathbb{R}.\mathrm{i} + \mathbb{R}.\mathrm{j} + \mathbb{R}.\mathrm{k}$ et on remarque que $\mathbb{I} = (\mathbb{R}.1)^\perp$.

Pour $h \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, soit $\varphi_h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, u \longmapsto huh^{-1} = hu\overline{h}$. C'est un automorphisme de $\mathbb{H}$. L'application $\varphi : \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}), h \longmapsto \varphi_h$ est alors bien définie et est un morphisme de groupes puisque $\varphi_1 = \mathrm{id}$ et pour $h, h' \in \mathbb{H}$:

$$\forall u \in \mathbb{H}, \varphi_{hh'}(u) = hh'u(hh')^{-1} = hh'uh'^{-1}h^{-1} = \varphi_h \circ \varphi_{h'}(u)$$

Fixons $h \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. φ_h est linéaire et conserve la norme puisque :

$$\forall u \in \mathbb{H}, N(\varphi_h(u)) = \det(huh^{-1}) = \det(u) = N(u)$$

Ainsi $\varphi_h \in \mathcal{O}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$. Comme φ_h stabilise $\mathbb{R}.1$, elle stabilise $(\mathbb{R}.1)^\perp = \mathbb{I}$. Posons alors $\phi_h = \varphi_{h|\mathbb{I}} \in \mathcal{O}(\mathbb{I}) \simeq \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ puis $\phi : h \longmapsto \phi_h$, qui définit une action de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{I} \simeq \mathbb{R}^3$.

- Déterminons $\ker(\phi)$.
  Si $\phi_h = \mathrm{Id}$, on a que $hu = uh$ pour tout $u \in \mathbb{I}$, ainsi $h \in Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}.1$. Comme $h \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, on a $h = \pm 1$. Ainsi $\ker(\phi) = \{\pm I_2\}$.

- Vérifions maintenant que $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
  L'application ϕ est continue car $\phi_h(u)$ est une multiplication en h, h^{-1} et u, donc $\mathrm{Im}(\phi)$ est connexe puisque $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ l'est, étant isomorphe[1] à $\mathbb{S}^3$. Cela implique $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ comme $\phi_1 = \mathrm{id} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

1. topologiquement, c'est-à-dire que l'on a une bijection continue d'inverse continu

- Enfin montrons que ϕ est surjective dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
  Pour cela, rappelons-nous que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements (symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$).
  Prenons donc $h \in \mathbb{I} \cap \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ et montrons que $\phi_h = r_h$ le retournement d'axe $\mathbb{R}.h$.
  En effet ϕ_h est orthogonal, vérifie $\phi_h(h) = h$ donc $\phi_{h|\mathbb{R}.h} = \mathrm{id}$ et si h' est orthogonal à h, alors $h\overline{h'} + h'\overline{h} = 0$ ou encore $h(-h') + h'(-h) = 0$, d'où $hh' = -h'h$ puis $\phi_h(h') = hh'h^{-1} = -h'$. Ainsi $\phi_{h|(\mathbb{R}.h)^\perp} = -\mathrm{id}$.

En passant au quotient, on obtient donc l'isomorphisme $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Explicitons cet isomorphisme.
Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
Posons $q' = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ puis $q = \cos(\theta/2).1 + \sin(\theta/2)q'$.
Alors $N(q) = \cos(\theta/2)^2 + \sin(\theta/2)^2 N(q') = 1$ par orthogonalité de $\mathbb{R}.1$ et $\mathbb{I}$, donc $q \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.

On a vu que $\phi_{q'}$ est la rotation d'axe (x, y, z) et d'angle π.
On va montrer que ϕ_q est la rotation d'axe de vecteur directeur (x, y, z) et d'angle θ.
En effet, pour $u \in \mathbb{I} \cap \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ on a[2] :

$$\phi_q(u) = qu\overline{q} = c_{\theta/2}^2 u + c_{\theta/2}s_{\theta/2}(q'u - uq') - s_{\theta/2}^2 q'uq'$$

Donc d'une part puisque $(q')^2 = -q'\overline{q'} = -1$:

$$\phi_q(q') = (c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2(q')^2)q' = (c_{\theta/2}^2 + s_{\theta/2}^2)q' = q'$$

et d'autre part si $\langle u \mid q' \rangle = 0$, on a vu que $q'u = -uq'$ d'où

$$\phi_q(u) = (c_{\theta/2}^2 - s_{\theta/2}^2)u + 2c_{\theta/2}s_{\theta/2}q'u = c_\theta u + s_\theta q'u$$

En remarquant que $q'u$ correspond au produit vectoriel $\vec{q'} \wedge \vec{u}$, on a que $(q', u, q'u)$ forme une base orthonormée directe, et donc ϕ_q est bien la rotation annoncée.

COMMENTAIRES

La dernière partie bien que fort intéressante, n'est pas référencée. Elle peut être condensée avec la preuve de la surjectivité, mais on peut l'omettre si on n'a pas le temps ou si l'on ne s'en souvient plus. Ou juste mentionner le résultat pour attendre une question du jury.

Il faut être à l'aise avec la manipulation des quaternions, notamment la non commutativité, les calculs de carrés selon la norme, … Noter par exemple que le produit scalaire doit être symétrique, donc l'ordre des éléments dans chaque produit est important. Il faut aussi savoir retrouver le lien entre produit dans $\mathbb{H}$ et produit vectoriel.

2. en désignant c_α pour $\cos(\alpha)$ et s_α pour $\sin(\alpha)$