

ÉNONCÉ

THÉORÈME. $\text{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

DÉVELOPPEMENT

On se place sur $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{S} = \{-1, 1\}^3$ et $\mathcal{C}$ le cube de sommets $\mathcal{S}$. On nomme les sommets de $\mathcal{S}$ comme sur la figure ci-dessous.

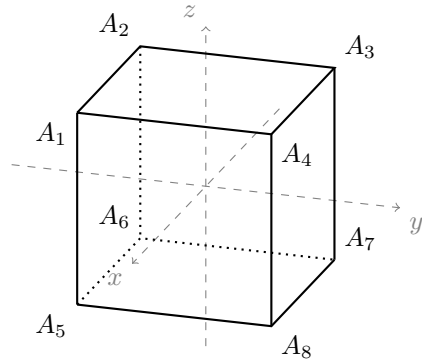


FIGURE 12.1 – Le cube $\mathcal{C}$ et la disposition des sommets de $\mathcal{S}$.

On sait que $\text{Isom}(\mathcal{C}) = \text{Isom}(\mathcal{S})$. De plus, on a l'isomorphisme $\text{Isom}(\mathcal{S}) \simeq \text{Isom}^+(\mathcal{S}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puisque l'on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}^+(\mathcal{S}) & \longrightarrow & \text{Isom}^-(\mathcal{S}) \\ \rho & \longmapsto & \rho \circ s \end{array}, \quad \text{où } s : x \longmapsto -x \in \text{Isom}^-(\mathcal{S}).$$

On veut donc montrer que $\text{Isom}^+(\mathcal{S}) \simeq \mathfrak{S}_4$. On va utiliser le lemme suivant :

LEMME. $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ est entièrement déterminée par la donnée de $f(A_i)$ et $f(A_j)$ pour un couple $(i, j) \in \llbracket 1, 8 \rrbracket^2$ tel que $[A_i A_j]$ est une arête du cube.

En effet, soient $f, g \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ telles que $f(A_1) = g(A_1)$ et $f(A_2) = g(A_2)$. Regardons $f^{-1} \circ g \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$: il s'agit d'une rotation fixant A_1 et A_2 , donc le plan $(O A_1 A_2)$: c'est donc l'identité puisqu'une rotation non triviale de $\mathbb{R}^3$ fixe au plus une droite.

1. on se place sur l'arête $[A_1 A_2]$ sans perte de généralité, quitte à réindiquer les sommets

Montrons désormais que $\text{Isom}^+(\mathcal{S}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Soit $\mathcal{D} = \{D_i : i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket\} = \{[A_1 A_7], [A_2 A_8], [A_3 A_5], [A_4 A_6]\}$ l'ensemble des grandes diagonales du cube. Si $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$, alors f induit une permutation de $\mathcal{D}$, puisque f conserve les distances, les segments, et que chaque point de $\mathcal{S}$ est envoyé sur un point de $\mathcal{S}$. On peut donc définir le morphisme de groupes $\Phi : \text{Isom}^+(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{D})$, $f \longmapsto \sigma_f$ où σ_f est telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad f(D_i) = D_{\sigma_f(i)}.$$

- Vérifions que c'est un morphisme injectif.

Soit $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ telle que $f(D_i) = D_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

En particulier $[f(A_1) f(A_7)] = f([A_1 A_7]) = [A_1 A_7]$. On a deux cas :

- Soit $f(A_1) = A_1$. D'une part, comme $f([A_1 A_2]) = [A_1 f(A_2)]$, la conservation des distances impose que $f(A_2) \in \{A_2, A_4, A_5\}$. D'autre part, la diagonale $[A_2 A_8]$ est fixée, donc $f(A_2) \in \{A_2, A_8\}$. Ainsi $f(A_2) = A_2$ et le lemme assure que $f = \text{id}$.
- Soit $f(A_1) = A_7 = -A_1$. Puisque $f([A_1 A_2]) = [A_7 f(A_2)]$, il découle par conservation des distances que $f(A_2) \in \{A_3, A_6, A_8\}$. La diagonale $[A_2 A_8]$ étant fixée, on a $f(A_2) = A_8 = -A_2$. De même, on vérifie que $f(A_4) = -A_4$ et $f(A_5) = -A_5$. Comme f conserve les diagonales on a en fait $f(A_k) = -A_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$, autrement dit $s \circ f = \text{id}$ soit $f = s \in \text{Isom}^-(\mathcal{S})$, ce qui contredit la définition de f .

Ainsi $\ker(\Phi) = \{\text{id}\}$ et Φ est bien un morphisme injectif de $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$.

- Reste à montrer qu'il est surjectif, ou encore que $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$ contient 24 éléments. Soit

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}^+(\mathcal{S}) \times \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ (f, A_k) & \longmapsto & f(A_k) \end{array}.$$

On va montrer que cette action est transitive et que le stabilisateur d'un sommet contient 3 isométries. L'équation aux classes conclura alors que :

$$\text{card}(\text{Isom}^+(\mathcal{S})) = \text{card}(\mathcal{S}) \cdot \text{card}(\text{Stab}(A_1)) = 8 \times 3 = 24.$$

- Montrons d'abord que l'action n'a qu'une orbite.

Prenons par exemple A_1 , et regardons $\rho_z \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ la rotation d'axe $(O z)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ ainsi que $\rho_y \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ la rotation d'axe $(O y)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a

$$\begin{array}{llll} \text{id}(A_1) = A_1, & \rho_z(A_1) = A_2, & \rho_z^2(A_1) = A_3, & \rho_z^3(A_1) = A_4, \\ \rho_y(A_1) = A_5, & \rho_y^2(A_1) = A_6, & \rho_z^2 \rho_y(A_1) = A_7, & \rho_z^3 \rho_y(A_1) = A_8, \end{array}$$

et ainsi $\text{Isom}^+(\mathcal{S}) \cdot A_1 = \mathcal{S}$: l'action est transitive.

- Montrons maintenant que $\text{Stab}(A_1)$ possède 3 éléments.

Si $f \in \text{Isom}^+(\mathcal{S})$ fixe A_1 , alors f permute $\{A_2, A_4, A_5\}$ par conservation des distances. Le lemme permet alors d'assurer que $\text{card}(\text{Stab}(A_1)) \leq 3$.

Par ailleurs, l'identité et les rotations d'axe $(O A_1)$ et d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$ sont bien des isométries distinctes de $\text{Stab}(A_1)$.