41. Intégrale de DIRICHLET

[Far00, §VII.2, p98] [FGN14, §4.27, p214]

ÉNONCÉ

APPLICATION. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

DÉVELOPPEMENT

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}(t,x)$ définie par $f(t,x) = \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}$ si $x > 0$ et $f(t,0) = 1$.
On pose $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Cette application est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $|f(t,x)| = O(\mathrm{e}^{-tx})$ est intégrable et $f(t,.)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Vérifions que l'intégrale de DIRICHLET $F(0)$ est semi-convergente. Pour $A \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, le crochet tend vers 0 et l'intégrale de droite converge puisque le terme sous l'intégrale est un $O(1/x^2)$. Donc $F(0)$ est bien définie.

- Montrons que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Appliquons pour cela le théorème de dérivabilité sous le signe intégral, valable puisque :
  - pour $t > 0$, $f(t,.)$ est bien intégrable comme vu précédemment,
  - pour tout $x \geq 0$, $f(.,x)$ est dérivable, de dérivée $\partial_t f(t,x) = -\sin(x)\,\mathrm{e}^{-tx}$,
  - pour tout $\alpha > 0$, puis pour tout $t > \alpha$, $|\partial_t f(t,x)| \leq |\sin(x)|\,\mathrm{e}^{-\alpha x} \leq \mathrm{e}^{-\alpha x}$ intégrable.

  Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^{+\infty} \partial_t f(t,x)dx = -\int_0^{+\infty} \sin(x)\,\mathrm{e}^{-tx}\,dx = -\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-t)x}\,dx\right) \\ &= -\,\mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{i-t}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) = -\frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

- Ainsi $F(t) = -\arctan(t) + C$ pour $t > 0$ (F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$) où C est une constante à déterminer, en calculant par exemple $\lim_{+\infty} F$.
  Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée (puisque $|f(t,x)| \leq \mathrm{e}^{-\alpha x}$ pour $t \geq \alpha > 0$) et alors $\lim_{+\infty} F = 0$.
  D'où $C = \frac{\pi}{2}$.

- Pour conclure il suffit alors de montrer que F est continue en 0, puisqu'alors

$$F(0) = -\arctan(0) + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $A > 0$. On a :

$$\begin{aligned} |F(t) - F(0)| &= \left|F(t) \pm \int_0^A f(t,x)dx \pm \int_0^A f(0,x)dx - F(0)\right| \\ &\leq \left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx\right| + \left|\int_0^A (\mathrm{e}^{-tx} - 1)\frac{\sin(x)}{x}dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \end{aligned}$$

Majorons $\left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx\right|$. Pour $B > A$, on a :

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx &= \mathrm{Im}\left(\int_A^B \frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{x}dx\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{(i-t)x}\right]_A^B + \int_A^B \frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}dx\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(i-t)B}}{(i-t)B} - \frac{\mathrm{e}^{(i-t)A}}{(i-t)A} + \int_A^B \frac{\mathrm{e}^{(i-t)x}}{(i-t)x^2}dx\right) \end{aligned}$$

En passant à la limite en $B \to +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin(x)}{x}dx\right| &\leq \left|\mathrm{Im}\left(-\frac{\mathrm{e}^{(i-t)A}}{(i-t)A} + \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix-tx}}{(i-t)x^2}dx\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{|i-t|\,A} + \frac{1}{|i-t|}\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \leq \frac{2}{A} \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons A tel que $\frac{2}{A} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|F(t) - F(0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_0^A (\mathrm{e}^{-tx} - 1)\frac{\sin(x)}{x}dx\right|$$

Cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par convergence dominée. Donc $|F(t) - F(0)| \leq \varepsilon$ pour t assez petit.
Ainsi F est continue en 0, ce qui permet de conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.