40. Injectivité de la fonction caractéristique et application

[Ouv09, §12.2, p197]

ÉNONCÉ

On admet que $\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)} : \zeta \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2\zeta^2}{2}}$.

PROPOSITION. *ϕ_X caractérise $\mathbb{P}_X$.*

APPLICATION. [LOI MULTINOMIALE POISSONNIFIÉE]
Soient $(p_j)_{1\leq j\leq d}$ des réels positifs tels que $\sum_{1\leq j\leq d} p_j = 1$. Soient $(Y^k)_{k\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(Y^k = j) = p_j$. Soit N indépendante des $(Y^k)_{k\geq 1}$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.
En posant $X^k = (\mathbb{1}_{Y^k=1}, \dots, \mathbb{1}_{Y^k=d})$, la loi de $S = \sum_{k=1}^N X^k$ est $\mathcal{P}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(\lambda p_d)$.

DÉVELOPPEMENT

Faisons la preuve pour $d = 1$. Soient X_1, X_2 des v.a. réelles telles que $\phi_{X_1} = \phi_{X_2}$.
Pour $\sigma > 0$, on pose $g_\sigma : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} g_{1/\sigma}(t)\, \mathrm{e}^{-itx}\, dt$.
Enfin pour $j \in [\![1, 2]\!]$, soit $f_{\sigma,j} : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} g_\sigma(x-y) d\mu_j(y)$ et $\mu_{\sigma,j} = f_{\sigma,j}\,\mathrm{Leb}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_{\sigma,1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_{1/\sigma}(t)\, \mathrm{e}^{-it(x-y)}\, dt \right) d\mu_1(y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ity}\, d\mu_1(y)\, \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-itx}\, dt && \text{par Fubini-Lebesgue} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_1(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-itx}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_2(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-itx}\, dt && \text{par hypothèse} \\
&= \cdots = f_{\sigma,2}(x)
\end{aligned}$$

De plus, pour $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu_{\sigma,j}(x) - \int_{\mathbb{R}} h(y) d\mu_j(y) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) \int_{\mathbb{R}} g_\sigma(x-y) d\mu_j(y) dx - \int_{\mathbb{R}} h(y) d\mu_j(y) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h(y)|\, g_\sigma(x-y) d\mu_j(y) dx \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

l'inégalité provenant du théorème de Fubini-Tonelli, et du fait que $\int g_\sigma = 1$. La limite est obtenue par convergence dominée, avec la domination :

$$u_\sigma(y) = \int_{\mathbb{R}} |h(x) - h(y)|\, g_\sigma(x-y) d\mu_j(x) \leq 2\,\|h\|_\infty \int g_\sigma = 2\,\|h\|_\infty$$

et on vérifie que $u_\sigma(y) \longrightarrow_{\sigma\to 0} 0$ puisque $(g_\sigma)_{\sigma\to 0}$ est une approximation de l'unité et donc $u_\sigma(y) = \ell \star g_\sigma(0) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ où $\ell : u \longmapsto |h(y+u) - h(y)|$ est continue à support compact.

On a donc $\mathbb{E}[h(X_1)] = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{\sigma,1}(x) dx = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{\sigma,2}(x) dx = \mathbb{E}[h(X_2)]$.
Ceci étant valable pour toute fonction h, on en déduit que $\mu_1 = \mu_2$.
Si d est quelconque, on procède de même avec $g^{(d)}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d g_\sigma(x_i)$.

Passons à l'application. On calcule, pour $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\phi_S(t) &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i \sum_{k=1}^N t.X^k} \right] = \mathbb{E}\left[\sum_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{i \sum_{k=1}^p t.X^k}\, \mathbb{1}_{N=p} \right] \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i \sum_{k=1}^p t.X^k}\, \mathbb{1}_{N=p} \right] && \text{par Fubini-Lebesgue} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^p \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it.X^k} \right] \mathbb{P}(N=p) && \text{par indépendance} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it.X^1} \right] \right)^p \mathbb{P}(N=p) = g_N\left(\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it.X^1} \right] \right)
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{it.X^1} \right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i \sum_{j=1}^d t_j \mathbb{1}_{Y^1=j}} \right] = \sum_{j=1}^d p_j\, \mathrm{e}^{it_j}$, d'où en utilisant que $\sum_{j=1}^d p_j = 1$:

$$\phi_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda\left(\sum_{j=1}^d p_j\, \mathrm{e}^{it_j} - 1 \right)} = \mathrm{e}^{\lambda \sum_{j=1}^d p_j (\mathrm{e}^{it_j} - 1)} = \prod_{j=1}^d \mathrm{e}^{\lambda p_j (\mathrm{e}^{it_j} - 1)} = \prod_{j=1}^d \phi_{\mathcal{P}(\lambda p_j)}(t_j)$$

Et donc par injectivité de la fonction caractéristique, $S \sim \mathcal{P}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(\lambda p_d)$.

COMMENTAIRES

Dans le plan, attention à l'ordre des propriétés : on utilise pour l'application la fonction génératrice d'une loi de Poisson, ainsi que la caractérisation de l'indépendance par la fonction caractéristique. Le développement diffère beaucoup de la référence.

Il faut savoir faire la preuve en dimension quelconque.