DÉTERMINANT DE GRAM ET INÉGALITÉ DE HADAMARD

[Gou09, §5.3, p262–263]

ÉNONCÉ

Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe).

Théorème. [Distance à un sous-espace vectoriel] *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n et muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout $x \in E$, on a :*

$$d(x,F)^2 = \frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)} .$$

Théorème. [Inégalités de Hadamard]

(i) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1,\dots,x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

(ii) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1,\dots,x_n)| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$, où $\|.\|_2$ désigne la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$.

Dans les deux points, on a égalité si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.

DÉVELOPPEMENT

Remarquons que le déterminant de Gram d'une famille de vecteurs liée est nul, par linéarité du produit scalaire. Réciproquement, si le déterminant est nul, les vecteurs colonnes des produits scalaires sont liés, donc il existe $k \in [\![1,n]\!]$ et $(\lambda_\ell)_{\ell\neq k}$ coefficients non tous nuls tels que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \langle e_i \mid e_k \rangle = \sum_{\ell \neq k} \lambda_\ell \langle e_i \mid e_\ell \rangle = \langle e_i \mid \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \rangle ,$$

et donc $e_k - \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$. Mais $e_k - \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, donc $e_k - \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell = 0$ et la famille de vecteurs est liée.

Montrons alors le premier théorème.

1. F étant de dimension finie, on a que $d(x,F)$ est atteint en la projection $f \in F$ de x, ainsi $d(x,F) = \|x-f\|$. Par définition de f, notons que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \langle x \mid e_i \rangle = \langle f \mid e_i \rangle \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \|f\|^2 + \|x-f\|^2 .$$

2. On a $M_G(e_1,\dots,e_n,x) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1 \mid x\rangle \\ & \mathcal{M}_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n \mid x \rangle \\ \hline \langle x \mid e_1 \rangle & \cdots & \langle x \mid e_n \rangle & \|x\|^2 \end{array}\right)$.

D'où par linéarité par rapport à la dernière colonne :

$$G(e_1,\dots,e_n,x) = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1 \mid f\rangle \\ & \mathcal{M}_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n \mid f \rangle \\ \hline \langle f \mid e_1 \rangle & \cdots & \langle f \mid e_n \rangle & \|f\|^2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathcal{M}_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \langle f \mid e_1 \rangle & \cdots & \langle f \mid e_n \rangle & \|x-f\|^2 \end{array}\right|$$

$$= G(e_1,\dots,e_n,f) + \|x-f\|^2 \cdot G(e_1,\dots,e_n)$$

$$G(e_1,\dots,e_n,x) = d(x,F)^2 \cdot G(e_1,\dots,e_n) ,$$

car $f \in F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$.

Montrons désormais le second théorème.

1. Si la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée, alors $G(x_1,\dots,x_n) = 0$ et l'inégalité est évidente. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'une famille de n vecteurs libres de E vérifie l'inégalité, avec égalité si et seulement si ils sont orthogonaux.
   - Si $n = 1$, on a $G(x_1) = \|x_1\|^2$.
   - Supposons la propriété vraie au rang n. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}$ des vecteurs libres de E. Notons $F = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ et considérons f la projection orthogonale de x_{n+1} sur F. Alors :

   $$\begin{aligned} G(x_1,\dots,x_{n+1}) &= G(x_1,\dots,x_n)\cdot\|x_{n+1}-f\|^2 && \text{par le premier théorème} \\ &\overset{(1)}{\leq} \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 \cdot \|x_{n+1}-f\|^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ G(x_1,\dots,x_{n+1}) &\overset{(2)}{\leq} \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 \cdot \|x_{n+1}\|^2 , \end{aligned}$$

   comme $\|x_{n+1}-f\|^2 \leq \|x_{n+1}-f\|^2 + \|f\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$.
   On a de plus égalité dans (1) si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale (par hypothèse de récurrence) et dans (2) si et seulement si $\|x_{n+1}-f\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$, c'est-à-dire $\|f\|^2 = 0$, ou encore x_{n+1} est orthogonal aux $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.
   On a donc montré l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

   D'où le résultat par principe de récurrence.
2. Notons que $M_G(x_1,\dots,x_n) = \overline{N^\top} N$ où N est la matrice de vecteurs colonnes les $(x_i)_{1\leq i\leq n}$. On applique alors le point précédent avec $G(x_1,\dots,x_n) = |\det(N)|^2$.