170, 122, 140

FGN, Alg 3, pour 1]
Seguin Pazzi, pour 2]

Théorème de Pfister

(13)

Thm: Soit k un corps de caractéristique $\neq$ de 2 et $n \geq 1$.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k^*$ et $P \in k[X]$.
si $\exists F_1, \dots, F_n \in k(X)^n, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i^2 = P$
Alors : $\exists P_1, \dots, P_n \in k[X]^n, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i^2 = P$

Soit $q : A = (A_1, \dots, A_n) \in k(X)^n \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i^2$ q est une f.q. non dégénérée.

Soit $F = (F_1, \dots, F_n)$ de sorte que $q(F) = P$

1] Supposons q isotrope : soit $T = (T_1, \dots, T_n) \neq 0$ tq $q(T) = 0$

Quitte à multiplier T par un bon polynome, on peut supposer que $T_1, \dots, T_n \in k[X]$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble

Par Bézout : $\exists S_1, \dots, S_n \in k[X]$ tq $\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i T_i = 1$
ie $\varphi(T, S) = 1$
où φ est la forme polaire de q et $S = (S_1, \dots, S_n)$

Soit $y = S - \frac{1}{2} q(S).T$. On a : $\begin{cases} q(y) = 0 \\ \varphi(T, y) = \varphi(T, S) = 1 \end{cases}$

et donc $q(\underbrace{T + \frac{1}{2} P.y}_{\in k[X]^n}) = P$ et le résultat.
(Rq : valable $\forall P \in k[X]$, mi démo)

2] Supposons q non isotrope : Parmis tous les $L \in k[X]$ tels qu'il existe $H_1, \dots, H_n \in k[X]$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{H_i^2}{L^2} = P$, choisissons en un de degré minimal. (Par hypothèse au moins un tel L existe). Il s'agit de montrer que ce degré est nul. On procède par l'absurde en supposant qu'il est strictement positif. Quitte à changer les notations on peut supposer que $\forall i = 1 \dots n, \ F_i = \frac{H_i}{L}$

• Soit $Q : (B_1, \dots, B_m, B) \in k(X)^{m+1} \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i^2 - B^2 P$

Q est une f.q. dont on note φ la forme polaire associée.

– Soit $x = (H_1, \dots, H_m, L)$. $Q(x) = 0$

Si $i = 1 \dots m$, écrivons $H_i = G_i L + R_i$ dans $k[X]$ (division euclidienne) avec $d^0 R_i < d^0 L$.

– Soient $z = (G_1, \dots, G_m, 1)$ et $r = (R_1, \dots, R_m, 0)$

on a donc $x = Lz + r$.

• Par minimalité du degré de L, on a forcément $Q(z) \neq 0$.

• Soit $y = \underbrace{Q(z)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left(x - 2\frac{\varphi(x,z)}{Q(z)} z\right)}_{(*) \neq 0}$ on a : $Q(y) = Q(z)^2 Q(x) = 0$

donc y est isotrope $\neq 0$ pour Q.

de plus $y = Q(z)x - 2\varphi(x,z).z$ est à coordonnées polynomiales.

écrivons $y = (T_1, \dots, T_m, T)$

• $T \neq 0$, car sinon $0 = Q(y) = q(y)$ et q anisotrope entraîne $(T_1, \dots, T_m) = 0$ donc $T^2 P = 0$ puis $T = 0$ et enfin $y = 0$, ce qui n'est pas.

• en identifiant le dernier coefficient de y, on obtient :

$T = Q(z)L - 2\varphi(x,z)$ puis

$$LT = L^2 Q(z) - 2L\,\varphi(x,z) + \overbrace{Q(x)}^{=0}$$
$$= Q(Lz - x) = Q(-r) = Q(r) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i R_i^2$$

et donc $d^0 L + d^0 T < 2\, d^0 L$ donc $d^0 T < d^0 L$

et $Q(y) = 0$. Ce qui est une contradiction avec la minimalité de L.

(*) si $y = 0$, alors $Q(z)x = 2\varphi(x,z)z \Rightarrow Q(z)\varphi(x,z) = 2\varphi(x,z)Q(z)$

$\Rightarrow \varphi(x,z) = 0$ donc $y = Q(z)x \neq 0$ car $x \neq 0$ contradiction.

en fait on peu l'interpréter : $x - 2\frac{\varphi(x,z)}{Q(z)} z$ est l'image de x par la réflexion d'hyperplan $\ker \varphi(z, \cdot)$ (qui est bijective)