38. Formule d'EULER-MACLAURIN et application à la série harmonique

[Gou08, §4.7, p301]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [FORMULE D'EULER-MACLAURIN]
Soient $m < n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m,n] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^r$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{\ell=2}^{r} \frac{b_\ell}{\ell!}[f^{(\ell-1)}(n) - f^{(\ell-1)}(m)] + R_r$$

où $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \tilde{B}_r(t)f^{(r)}(t)dt$ avec $\tilde{B}_r(t) = B_r(t - \lfloor t \rfloor)$.

APPLICATION. [SÉRIE HARMONIQUE]
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{\ell=1}^{r-1} \frac{b_{2\ell}}{2\ell}\frac{1}{n^{2\ell}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$.

DÉVELOPPEMENT

RAPPEL. On rappelle que $B_1 = X - 1/2$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$, $B_n(0) = b_n$ et $b_{2n+1} = 0$. De plus, $B_n(0) = B_n(1)$ si $n \geq 2$.

Soient $m < n \in \mathbb{Z}$. Procédons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$. Posons $\mathcal{H}_r$: « la formule est vraie pour toute fonction $f : [m,n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$ ».

- Initialisation : soit $f : [m,n] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
  Montrons que $R_1 = \int_m^n \tilde{B}_1(t)f'(t)dt = \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(t)dt - \frac{1}{2}[f(m)+f(n)]$.
  Comme $B_1 = X - 1/2$, on a en intégrant par parties pour $m \leq k < n$:

  $$\int_k^{k+1} \tilde{B}_1(t)f'(t)dt = [(t-k-1/2)f(t)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

  Et donc en sommant sur les k, on obtient exactement la formule ci-dessus. D'où $\mathcal{H}_1$.

- Hérédité : supposons $\mathcal{H}_{r-1}$ vraie pour un $r \geq 2$. Soit $f : [m,n] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^r$.
  On a $\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}[f(m)+f(n)] + \sum_{\ell=2}^{r-1} \frac{b_\ell}{\ell!}[f^{(\ell-1)}(n) - f^{(\ell-1)}(m)] + R_{r-1}$ par hypothèse de récurrence.
  Il suffit donc de montrer que $R_{r-1} = \frac{b_r}{r!}[f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)] + R_r$.
  Or, toujours en intégrant par parties pour $m \leq k < n$, on a d'après les propriétés des polynômes de BERNOULLI :

  $$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t)f^{(r)}(t)dt &= [\tilde{B}_r(t)f^{(r-1)}(t)]_k^{k+1} - r\int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t)f^{(r-1)}(t)dt \\ &= b_r[f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)] - r\int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t)f^{(r-1)}(t)dt\end{aligned}$$

  D'où en sommant sur les k et en multipliant par $\frac{(-1)^{r+1}}{r!}$:

  $$R_r = \frac{(-1)^{r+1}b_r}{r!}[f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)] + R_{r-1}$$

  En utilisant le fait que $(-1)^r b_r = b_r$ puisque $b_r = 0$ si r est impair, on obtient $\mathcal{H}_r$.

D'où le résultat par récurrence. Appliquons-le à la fonction $f : t \longmapsto 1/t$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre 1 et n, pour un $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. On calcule $f^{(\ell-1)}(t) = \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{t^\ell}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$\begin{aligned}H_n &= \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{\ell=2}^{2r} \frac{(-1)^{\ell-1}b_\ell}{\ell}\left(\frac{1}{n^\ell} - 1\right) + \frac{(-1)^{2r+1}}{(2r)!}\int_1^n \tilde{B}_{2r}(t)\frac{(-1)^{2r}2r!}{t^{2r+1}}dt \\ &= \ln n + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=2}^{2r} \frac{(-1)^\ell b_\ell}{\ell} - \int_1^\infty \frac{\tilde{B}_{2r}(t)}{t^{2r+1}}dt\right)}_{c_r} + \frac{1}{2n} + \sum_{\ell=2}^{2r} \frac{(-1)^{\ell-1}b_\ell}{\ell}\frac{1}{n^\ell} + \int_n^\infty \frac{\tilde{B}_{2r}(t)}{t^{2r+1}}dt \\ &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{\ell=2}^{2r} \frac{(-1)^\ell b_\ell}{\ell}\frac{1}{n^\ell} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)\end{aligned}$$

puisque $\left|\int_n^\infty \frac{\tilde{B}_{2r}(t)}{t^{2r+1}}dt\right| \leq M\int_n^\infty \frac{1}{t^{2r+1}}dt = O(n^{-2r})$ et $c_r = \lim_{n\to+\infty} H_n - \log(n) = \gamma$.

Comme $b_{2h+1} = 0$ pour $h \geq 1$, on obtient $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{h=1}^{r-1} \frac{b_{2h}}{2h}\frac{1}{n^{2h}} + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right)$.

COMMENTAIRES

Le calcul des premiers nombres de BERNOULLI donne :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + O\left(\frac{1}{n^{13}}\right)$$

Ce développement calculatoire doit être bien préparé. On peut notamment avoir des questions sur les propriétés des polynômes/nombres de BERNOULLI (par exemple calculer les premiers), l'application de cette formule à d'autres fonctions (exemple : retrouver la formule de STIRLING avec un reste à l'ordre quelconque. Pour cela on considère la fonction log, ou encore trouver un équivalent de $\sum 1/k^2$ en $+\infty$ et en déduire une formule pour $\pi^2/6$ en fonction des nombres de BERNOULLI). Voir d'autres questions dans le document de Benjamin Groux.