FORMES DE HANKEL

[CG13a, §V.D, p197]

ÉNONCÉ

Proposition. [forme de Hankel]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Notons $x_1, \dots, x_t$ ses racines distinctes et $m_1, \dots, m_t$ leur multiplicités respectives. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$, $s_k = \sum_{\ell=1}^{t} m_\ell x_\ell^k$, puis on pose

$$\forall (X_0, \dots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad s(X_0, \dots, X_{n-1}) = \sum_{0 \le i,j \le n-1} s_{i+j} X_i X_j \,.$$

Alors la restriction $s_\mathbb{R}$ de s à $\mathbb{R}^n$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de signature (p,q) où $p+q=t$ et $p-q$ est le nombre de racines réelles de P.

DÉVELOPPEMENT

1. Dans un premier temps, vérifions que s est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
   s est un polynôme homogène de degré 2, donc une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. Il suffit donc de s'assurer que $s(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$. Pour cela, on vérifie que les $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont réels. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire puisque x_i et $\overline{x_i}$ ont même multiplicité dans P à coefficients réels :
   $$s_k = \sum_{1\le \ell \le t \,:\, x_\ell \in \mathbb{R}} m_\ell\, x_\ell^k + \sum_{1 \le \ell \le t \,:\, \mathrm{Im}(x_\ell)>0} m_\ell \underbrace{\left(x_\ell^k + \overline{x_\ell}^k\right)}_{\in \mathbb{R}} \quad \in \mathbb{R}\,.$$
   Ainsi s est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont on note (p,q) la signature.
2. Définissons maintenant $\phi_\ell(X_0, \dots, X_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_\ell^i X_i$ pour $\ell \in [\![1,t]\!]$. On a :
   $$\forall \ell \in [\![1,t]\!], \quad \sum_{\ell=1}^{t} m_\ell\, \phi_\ell^2 = \sum_{\ell=1}^{t} m_\ell \sum_{0\le i,j\le n-1} x_\ell^{i+j} X_i X_j = \sum_{0 \le i,j \le n-1} \left(\sum_{\ell=1}^{t} m_\ell x_\ell^{i+j} \right) X_i X_j$$
   $$= \sum_{0\le i,j \le n-1} s_{i+j} X_i X_j = s\,.$$
   Remarquons de plus que les $(\phi_\ell)_{1\le \ell \le t}$ sont des formes linéaires indépendantes. En effet, si $\mathcal{B}$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a :
   $$M_\mathcal{B}(\phi_1, \dots, \phi_t) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_t^{n-1} \end{pmatrix},$$
   matrice dont le mineur principal d'ordre t est inversible (déterminant de Vandermonde). La matrice est donc de rang t, tout comme la famille $(\phi_\ell)_{1\le\ell\le t}$, qui est donc composée de formes indépendantes.
   Le rang étant invariant par extension de corps, on a que
   $$p + q = \mathrm{rg}(s_\mathbb{R}) = \mathrm{rg}(s) = \mathrm{rg}\left(\sum_{\ell=1}^{t} m_\ell \phi_\ell^2 \right) = t\,,$$
   puisque les $(m_\ell)_{1\le\ell\le t}$ sont tous strictement positifs. Ainsi $p+q=t$.
3. Fixons $\ell \in [\![1,t]\!]$ et regardons la signature de $\psi_\ell = \phi_\ell^2 + \overline{\phi_\ell}^2$ lorsque $\mathrm{Im}(x_\ell) > 0$.
   On remarque que $\psi_\ell = 2\,\mathrm{Re}(\phi_\ell^2)$ est une forme quadratique réelle et on calcule que
   $$\phi_\ell^2 = \mathrm{Re}(\phi_\ell)^2 - \mathrm{Im}(\phi_\ell)^2 + 2i\,\mathrm{Re}(\phi_\ell)\,\mathrm{Im}(\phi_\ell)\,, \quad \text{d'où} \quad \psi_\ell = 2\,\mathrm{Re}(\phi_\ell)^2 - 2\,\mathrm{Im}(\phi_\ell)^2\,.$$
   Par ailleurs, comme $x_\ell \neq \overline{x_\ell}$, il est facile de vérifier que ϕ_ℓ et $\overline{\phi_\ell}$ sont indépendantes. Ainsi ψ_ℓ est de rang 2 sur $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{R}$, et alors nécessairement ψ_ℓ est de signature $(1,1)$: en effet on a écrit la réduction de Gauss de ψ_ℓ (si $\mathrm{Re}(\phi_\ell)$ et $\mathrm{Im}(\phi_\ell)$ étaient liées, ϕ_ℓ serait de rang 1).
4. Reste à écrire s sous la forme
   $$s = \sum_{1\le\ell\le t \,:\, x_\ell\in\mathbb{R}} m_\ell\,\phi_\ell^2 + \sum_{1\le \ell\le t\,:\, \mathrm{Im}(x_\ell)>0} m_\ell\, \psi_\ell^2\,.$$
   C'est la décomposition de Gauss de s. Notant r le nombre de racines réelles de P, s est alors de signature
   $$(r,0) + \left(\tfrac{t-r}{2}, \tfrac{t-r}{2}\right) = \left(\tfrac{t+r}{2}, \tfrac{t-r}{2}\right).$$
   Par unicité de la signature d'une forme quadratique réelle, on a alors $p-q=r$.

COMMENTAIRES

Il faut bien maitriser l'utilisation du rang qui intervient très régulièrement dans ce développement, en particulier l'invariance du rang par extension de corps.

A quoi servent les formes de Hankel ? On peut calculer le nombre de racines réelles/complexes d'un polynôme sans les connaître. En effet :

- on peut calculer les $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence en utilisant les polynômes symétriques élémentaires, sans avoir besoin des racines (voir par exemple [Gou09, §2.5, p80]),
- puis on a un algorithme pour trouver la réduction de Gauss, donc la signature, d'une forme quadratique.

Il vaut au moins savoir faire ces calculs sur des exemples simples !