36. Étude de deux suites récurrentes [FGN07, §2.25, p99–103]

ÉNONCÉ

APPLICATION. Soit f une application continue définie au voisinage de 0^+ admettant un développement asymptotique en 0 de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, où $a > 0$ et $\alpha > 1$. Alors pour $u_0 > 0$ assez petit, la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.
Exemples de $f = \sin$ et $f = \log(1+.)$.

APPLICATION. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$. Alors on a le DA_2 suivant : $u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

DÉVELOPPEMENT

Commençons par la première application.
Par continuité de f, on a $f(0) = 0$.
On a $f(x) = x - ax^\alpha(1 + o(1))$ donc il existe un $\eta > 0$ tel que $f(x) < x$ pour $x \in]0, \eta]$.
Prenons $u_0 \in]0, \eta]$. Alors u est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un point fixe de f sur $[0, \eta]$, qui ne peut être que 0. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On souhaite trouver β tel que $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle, afin d'appliquer le théorème de CESÀRO. Or :

$$\begin{aligned} f(x)^\beta - x^\beta &= (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^\beta - x^\beta = x^\beta((1 - ax^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^\beta - 1) \\ &\underset{x\to0}{=} x^\beta(-a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})) \underset{x\to0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

Prenant $\beta = 1 - \alpha$, on a que $f(x)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} a(\alpha - 1)$.
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a alors :

$$u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a(\alpha-1)$$

Et donc par le théorème de CESÀRO, on a que $u_n^{1-\alpha} - u_0^{1-\alpha} \sim na(\alpha - 1)$.
Ainsi $u_n^{1-\alpha} \sim na(\alpha-1)$ puis $u_n \sim \frac{1}{(na(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

Ainsi on a par exemple :

- pour $f(x) = \sin(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, en prenant $a = 1/6$ et $\alpha = 3$:

$$u_n \sim \frac{1}{\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$$

- pour $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, en prenant $a = 1/2$ et $\alpha = 2$:

$$u_n \sim \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^1} = \frac{2}{n}$$

Passons à la deuxième application.
Remarquons d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que si elle converge vers ℓ, alors $\ell = \ell + \mathrm{e}^{-\ell}$ par continuité, ce qui est impossible. Ainsi $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Posons[1] alors $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. On a que $v_{n+1} = v_n \exp(\mathrm{e}^{-u_n}) = v_n \exp(1/v_n)$.
Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)\right) = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Le théorème de CESÀRO donne que $v_n \sim n$, d'où l'on obtient :

$$v_{n+1} - v_n - 1 \sim \frac{1}{2v_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$\frac{1}{2n}$ est le terme général de signe positif d'une série divergente. Le théorème de sommation des équivalents donne que

$$v_{n+1} - v_1 - n = \sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k - 1 \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \sim \frac{\ln n}{2}$$

Et donc $v_n = n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n)$.

En passant au $\ln$, on obtient $u_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$, ou encore en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

1. cela nous permet d'utiliser le DL_0 de $\exp$