34. Équation de la chaleur périodique

[FGN12, §1.28, p49] [QZ13, §IV.VI.3, p105]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [ÉQUATION DE LA CHALEUR PÉRIODIQUE]
*Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle, 2π-périodique continue et $\mathcal{C}^1_{pm}$.
Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telle que :*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial^2_{xx} u & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

DÉVELOPPEMENT

Procédons par analyse/synthèse. Supposons d'abord u solution.
Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{T}$, on a :

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)\,\mathrm{e}^{inx} \qquad \text{où } c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,dx$$

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n(t)\,\mathrm{e}^{inx} \qquad \text{avec } \tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,dx = c_n'(t)$$

$$\partial^2_{xx} u(t,x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(t)\,\mathrm{e}^{inx}$$

Pour les trois égalités, on utilise que les fonctions en x sont $\mathcal{C}^\infty$, donc leur série de FOURIER converge en tout point de $\mathbb{T}$. Pour la seconde, l'égalité $\tilde{c}_n(t) = c_n'(t)$ provient alors du théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour la dernière, on procède soit à une double intégration par parties des coefficients de FOURIER, soit à une double dérivation terme à terme puisque les séries de fonctions de $\partial_x u$ et $\partial^2_{xx} u$ convergent normalement, ces fonctions étant $\mathcal{C}^1$.
Notons que ces trois séries convergent normalement en x.

Comme u est solution, on a $S(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))\,\mathrm{e}^{inx} = 0$ pour tout $t > 0$, avec convergence normale de la série. Et donc pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 = c_p(S) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t) + n^2 c_n(t))\,\mathrm{e}^{i(n-p)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)x}\,dx = c_p'(t) + p^2 c_p(t) \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $C_p \in \mathbb{C}$ telle que $c_p(t) = C_p\,\mathrm{e}^{-p^2 t}$ pour $t > 0$.

Fixons $t \in]0,1]$ et appliquons l'égalité de PARSEVAL à $x \longmapsto u(0,x) - u(t,x)$ (en notant $c_n(0)$ le n-ième coefficient de FOURIER de u_0) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(0) - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(0,x) - u(t,x)|^2\,dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par convergence dominée puisque $|u(0,x) - u(t,x)| \leq M$ pour $t \in]0,1]$. Donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} c_p(0)$ ou encore $C_p = c_p(0)$.

Ainsi $\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{T}, u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}$.

En particulier une potentielle solution est donc unique et est donnée par la forme ci-dessus. Définissons donc u par cette formule et vérifions que u est solution.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}, |C_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}| \leq |C_n|$ qui est le terme général d'une série convergente puisque $u_0 \in \mathcal{C}^1_{pm}$. On a donc convergence normale de u, donc u est bien définie et est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$.
u est de plus clairement 2π-périodique.

Fixons $k, \ell \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell}(C_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}) = C_n(-1)^k i^\ell n^{2k+\ell}\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}$.
Fixant $t_0 > 0$, on a pour $t \geq t_0$:

$$\left|\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell}(C_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx})\right| \leq |C_n|\,|n|^{2k+\ell}\,\mathrm{e}^{-n^2 t_0} \leq \|u_0\|_1\,|n|^{2k+\ell}\,\mathrm{e}^{-n^2 t_0} = o(1/n^2)$$

Ainsi par convergence normale $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et pour $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell} u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(-1)^k i^\ell n^{2k+\ell}\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}$$

Pour finir, on a $u(0,.) = u_0$ et prenant $(k,\ell) = (0,2)$ puis $(1,0)$, on obtient que u vérifie l'équation de la chaleur.

COMMENTAIRES

Il est important d'être clair sur les convergences normales et leurs implications (interversions série/intégrale), ainsi que sur les hypothèses de domination des théorèmes d'intégration (qui sont assez simples à montrer ici par périodicité et continuité). Il n'est pas possible d'écrire toutes les hypothèses, il faut donc bien les mentionner à l'oral et montrer une certaine aisance.

Par ailleurs, il faut s'attendre à des questions autour de l'équation de la chaleur dans d'autres contextes, par exemple sans la périodicité (voir [Gou08, p348]). Il faut aussi être calé sur les distributions, on peut avoir des questions autour des solutions faibles, etc ...