33. Équation de Burgers [BMP05, §1.6, p36]

ÉNONCÉ

Théorème. [Équation de Burgers généralisée]
Soit a et u_0 des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, telles que u_0 et u_0' sont bornées. Alors il existe $T>0$ tel qu'il existe une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u)\partial_x u = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

DÉVELOPPEMENT

On va procéder par analyse/synthèse. Supposons d'abord u solution.

1. On suppose u définie sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$ où $T>0$ est à déterminer. On pose $I=]-T,T[$. L'idée consiste à chercher des courbes $(t,x(t))_{t\in I}$ selon lesquelles u vérifie une équation différentielle ordinaire [1]. Plus précisément, soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = a(u(t,x(t))) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $x_0\in\mathbb{R}$ est fixé. La fonction $a\circ u$ étant $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe une solution maximale. Cette solution est définie globalement sur I par le théorème des bouts [2]. De plus on a pour tout $t\in I$:

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = \partial_t u(t,x(t)) + \partial_x u(t,x(t))x'(t) = (\partial_t u + a(u)\partial_x u)(t,x(t)) = 0$$

Donc u est constante sur la courbe $(t,x(t))_{t\in I}$ et en reprenant l'équation satisfaite par x on a que x' est constante égale à $a(u_0(x_0))$, d'où :

$$\forall t\in I, x(t) = x_0 + ta(u_0(x_0))$$

2. On voudrait écrire $u(t,x)=u_0(\varphi(t,x))$ pour une fonction φ, c'est-à-dire trouver pour un point (t,x) le point d'origine d'une potentielle courbe caractéristique passant par (t,x).

Posons $c=a\circ u_0$.
c' est bornée par hypothèse puisque $c'=a'(u_0)u_0'$ avec u_0,u_0' bornées et a' continue. Soit alors $M=\sup|c'|$. Quitte à réduire T, on peut supposer $T\leq\frac{1}{M}\in]0,+\infty]$.

3. Sous cette nouvelle hypothèse, on va pouvoir trouver une fonction φ unique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall(t,x)\in]-T,T[\times\mathbb{R}, u(t,x)=u_0(\varphi(t,x)) \text{ et } \varphi(0,x)=x$$

Soit en effet $F:]-T,T[\times\mathbb{R}\longrightarrow]-T,T[\times\mathbb{R}, (t,x)\longmapsto t, x+tc(x)$.

- F est $\mathcal{C}^1$ et on a $DF(t,x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(x) & 1+tc'(x)\end{pmatrix}$ pour $(t,x)\in]-T,T[\times\mathbb{R}$, donc $DF(t,x)$ est inversible puisque $|tc'(x)|\leq|t|\,M<1$.
- De plus F est injective. En effet si $F(t_1,x_1)=F(t_2,x_2)$ alors il est clair que $t_1=t_2$, d'où l'on déduit $x_2-x_1=t_1(c(x_1)-c(x_2))=t\int_{x_2}^{x_1}c'(x)dx$ et donc $|x_2-x_1|\leq|t_1|\,M\,|x_2-x_1|$, ce qui n'est possible que si $x_1=x_2$.

Par le théorème d'inversion globale, il existe G de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall(t,x)\in]-T,T[\times\mathbb{R}, G\circ F(t,x)=(t,x) \quad \text{et} \quad \forall(t,y)\in F(]-T,T[\times\mathbb{R}), F\circ G(t,y)=(t,y)$$

Fixons t et considérons $\psi_t : x\longmapsto x+tc(x)$. On a $\psi_t'(x)=1+tc'(x)>0$ uniformément en x puisque $|tc'(x)|\leq|t|\,M<1$, donc ψ_t est d'image $\mathbb{R}$. On en déduit que F est surjective.

On remarque que $G(t,y)$ est de la forme $(t,\varphi(t,y))$ pour une certaine fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$, uniquement déterminée par a et u_0. Il vient pour $(t,x)\in]-T,T[\times\mathbb{R}$:

$$(0,\varphi(0,x)) = G(0,x) = G(F(0,x)) = (0,x)$$
$$u(t,x) = u(F(G(t,x))) = u(F((t,\varphi(t,x)))) = u_0(\varphi(t,x))$$

Ainsi u est uniquement déterminée sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$.

Réciproquement, fixons $T\leq M^{-1}$ et définissons u par $u=u_0\circ\varphi$.
Notons que φ vérifie $\varphi(F(t,x))=\varphi(t,x+tc(x))=x$ pour $(t,x)\in]-T,T[\times\mathbb{R}$, d'où

$$\partial_t\varphi(F(t,x)) + c(x)\partial_x\varphi(F(t,x)) = 0$$

Ou encore $\partial_t\varphi(t,y)+c(\varphi(t,y))\partial_x\varphi(t,y)=0$ sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$ en composant par G. Ainsi :

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = (u_0'\circ\varphi)(\partial_t\varphi + a(u)\partial_x\varphi) = (u_0'\circ\varphi)(\partial_t\varphi + (c\circ\varphi)\partial_x\varphi) = 0$$

Ainsi u vérifie l'équation de Burgers généralisée, et on vérifie que $u(0,.)=u_0$.

1. si l'on impose à $x(t)$ de varier à la vitesse de la propagation, on s'attend à ce que u soit constante sur la courbe
2. car sur tout compact on a $x'(t)\leq C$ pour une certaine constante donc la solution n'explose pas

COMMENTAIRES

L'équation de Burgers (non visqueuse) est $\partial_t u + u\partial_x u = 0$. Ici on considère une équation généralisée du type $\partial_t u + \partial_x A(u) = 0$, qui se réécrit $\partial_t u + A'(u)\partial_x u = 0$.

Il faut bien comprendre l'intuition derrière les courbes caractéristiques, savoir ce qu'il se passe lorsque $T>1/M$, ou si l'on se place uniquement sur $x\in\mathbb{R}_+$.