31. Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite et lemme de la grenouille

[Gou08, §1.4, p46] [FGN07, §2.19, p86]

ÉNONCÉ

PROPOSITION. *Soit (E,d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d(u_n,u_{n+1}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.*
Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est connexe.

APPLICATION. [LEMME DE LA GRENOUILLE]
Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0,1]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

DÉVELOPPEMENT

Commençons par la proposition.
Par l'absurde, supposons Γ non connexe et écrivons $\Gamma = A \cup B$ avec A, B deux fermés non vides disjoints de Γ (puisque $\Gamma = \cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_n \,|\, n \geq p\}}$ est fermé).

A et B sont compacts en tant que fermés dans des compacts, et alors $\alpha = d(A,B) > 0$ puisqu'ils sont disjoints. Considérons alors [1] :

$$A' = \{x \in E \,|\, d(x,A) < \alpha/3\} = A + B(0,\alpha/3) \qquad \text{et} \qquad B' = \{x \in E \,|\, d(x,B) < \alpha/3\}$$

A' et B' sont ouverts, donc $K = (A' \cup B')^{c}$ est fermé donc compact.

Construisons une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K.
Fixons N_0 tel que $d(u_n,u_{n+1}) < \alpha/3$ pour $n \geq N_0$.

Prenons $a \in A$ et $b \in B$. Comme a et b sont valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les ensembles $V_a = \{n \geq N_0 \,|\, d(u_n,a) < \alpha/3\}$ et $V_b = \{n \geq N_0 \,|\, d(u_n,b) < \alpha/3\}$ sont infinis.

- Soit $N_a \in V_a$. Comme V_b est infini, on peut choisir $N_b \in V_b$ tel que $N_b > N_a$.
  Si pour tout $n \in [\![N_a, N_b]\!]$, $u_n \notin K$ alors en prenant $n \in [\![N_a, N_b - 1]\!]$ tel que $u_n \in A'$ et $u_{n+1} \in B'$, on a $d(u_n,u_{n+1}) \geq \alpha/3$, ce qui est absurde.
  Ainsi on peut trouver $k_0 \in [\![N_a + 1, N_b - 1]\!]$ tel que $u_{k_0} \in K$.
- Supposons $k_0 < k_1 < \cdots < k_r$ construits tels que $u_{k_j} \in K$ pour $j \leq r$.
  En réitérant le processus précédent avec $N_a > k_r$ (possible puisque V_a est infini), on obtient $k_{r+1} > k_r$ tel que $u_{k_{r+1}} \in K$.

1. faire le dessin du [Gou08]

On crée ainsi une sous-suite $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans le compact K, donc admettant une valeur d'adhérence ℓ. C'est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc :

$$\ell \in \Gamma \cap K = (A \cup B) \cap K \subset (A' \cup B') \cap K = \varnothing$$

Ce qui est absurde. Ainsi Γ est connexe.

Passons à l'application.

$\Longrightarrow$ Le sens direct est évident.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, supposons $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Notons Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La proposition précédente donne que Γ est un intervalle fermé de $[0,1]$.

On vérifie de plus que Γ est constitué de points fixes de f. Soit en effet $a \in \Gamma$, et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} a$. Alors :

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)+1} && \text{puisque } x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &= \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) \\ &= f(a) && \text{par continuité de } f \end{aligned}$$

Ainsi si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins deux valeurs d'adhérences, disons $\ell < \ell'$, alors $[\ell,\ell'] \subset \Gamma$, et on peut donc [2] trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in [\ell,\ell']$.
Mais alors x_N est un point fixe de f donc la suite est stationnaire en x_N donc n'a qu'une valeur d'adhérence, ce qui est absurde.

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une valeur d'adhérence, donc converge.

COMMENTAIRES

On pourra faire des dessins pour les deux résultats. Notamment s'il reste un peu de temps, on peut expliquer l'appellation « lemme de la grenouille », en reprenant l'idée de la proposition dans le cadre de l'application.

2. puisque par exemple $\frac{\ell+\ell'}{2}$ est valeur d'adhérence