30. Complétude de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ [Bre99, §IV.2, p57–58]

ÉNONCÉ

THÉORÈME. [THÉORÈME DE RIESZ-FISCHER]
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L^p(E, \mathcal{A}, \mu), \|.\|_p)$ est un espace de BANACH.

COROLLAIRE. *Toute suite convergente dans L^p admet une sous-suite qui converge μ-p.p..*

DÉVELOPPEMENT

On admet que l'espace est un espace vectoriel normé. Pour la complétude, on distingue les cas p fini et infini :

- Si $p = +\infty$:
  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY dans L^∞ :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,|\, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

  Pour $n, m \in \mathbb{N}$, soit $A_{n,m} = \{x \in E \,|\, |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$ et $A_n = \{x \in E \,|\, |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$.
  Alors $A = \cup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m} \bigcup \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathcal{A}$ de mesure nulle.
  De plus, pour tout $x \in A^c$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ complet) donc converge vers une limite notée $f(x) \in \mathbb{K}$.
  Posons $f(x) = 0$ pour $x \in A$. Alors $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est mesurable (limite simple de fonctions mesurables).
  Vérifions que $f \in L^\infty$. On a pour tout $x \in A^c$:

  $$\forall n, m \geq N_1, |f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$$

  Donc en prenant $n = N_1$ et $m \to +\infty$, il vient $|f(x)| \leq |f(x) - f_{N_1}(x)| + |f_{N_1}(x)| \leq 1 + \|f_{N_1}\|_\infty$. Comme $\mu(A) = 0$, on a que $|f| \leq 1 + \|f_{N_1}\|_\infty$ μ-p.p.. Ainsi $f \in L^\infty$.
  Enfin on a $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque pour tout $\varepsilon > 0$:

  $$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A^c, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

- Si $p < +\infty$:
  Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de CAUCHY dans L^p. On va montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_k = 2^{-k}$ et $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N_k, \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon_k$.
  Posant $n_0 = N_0$ puis $n_k = \max(N_k, n_{k-1} + 1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

  $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k \leq 2 < +\infty$$

  Posons $(\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}} = (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, et considérons $g_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} |\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k|$ pour $\ell \in \mathbb{N}$. On a que $\|g_\ell\|_p \leq 2$ pour tout ℓ et la suite $(g_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par convergence monotone, sa limite g vérifie $\|g\|_p \leq 2$. En particulier g est finie μ-p.p.. Soit A de mesure nulle tel que g est finie sur A^c.
  Pour $i \leq j$ et $x \in A^c$, on a :

  $$\left|\tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_i(x)\right| \leq \sum_{k=i}^{j-1} \left|\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)\right| \leq g(x) - g_{i-1}(x) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  ainsi $(\tilde{f}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY. Notons $f(x)$ sa limite. Pour $x \in A$, on pose $f(x) = 0$.
  Alors pour tout entier k, on a $\left|f - \tilde{f}_k\right| \leq g$ sur A. Donc $f \in L^p$ (car $|f| \leq g + \left|\tilde{f}_K\right|$ μ-p.p.), et par convergence dominée on obtient $\left\|f - \tilde{f}_k\right\|_p \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY dans L^p admettant une valeur d'adhérence $f \in L^p$.