VM
10/05/15

Cauchy-Lipschitz local

205, 206, 220

Soit $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, i.e $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists r>0, \exists h>0, \exists K>0$ tels que

$$\forall t \in]t_0-h, t_0+h[, \ \forall x, x' \in B(x_0, r)$$
$$\|f(t,x)-f(t,x')\| \leq K\|x-x'\|.$$

Soit $(t_0, x_0) \in U$.

Soit $(P) : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Théorème :

Il existe $h>0$ et φ une solution de (P) sur $[t_0-h, t_0+h]$.
De plus, φ coïncide avec toute solution de (P) sur un intervalle I contenu dans $[t_0-h, t_0+h]$ et contenant t_0.

dém : Soient h, r, M et $K>0$ tels que

i) $[t_0-h, t_0+h] \times BF(x_0, r) \subset U$

ii) f bornée par M sur $[t_0-h, t_0+h] \times BF(x_0,r)$.

iii) f est K-lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Comme i), ii), iii) restent valables pour tout $h' \in]0,h]$, on peut ajouter : iv) $h \leq \min\left(\frac{M}{r}, \frac{1}{2K}\right)$.

- Soit I un intervalle fermé contenant t_0, contenu dans $[t_0-h, t_0+h]$.

Soit $F = C^0(I, BF(x_0, r))$. F est un sev fermé de l'ensemble des fonctions continues bornées sur I, donc F est complet.

On pose $\psi : F \to F$
$$x \mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds\right).$$

- ψ est bien définie : Soit $x \in F$.

$\forall s \in I$, $x(s) \in BF(x_0, r)$, donc $(s, x(s)) \in U$.

Ainsi, $\varphi(x)$ est dérivable sur I, et vaut x_0 en t_0.

De plus, pour tout $t \in I$,

$$\|\varphi(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right\| \underset{(ii)}{\leq} h M \underset{(iv)}{\leq} r$$

• <u>Lemme</u> : x est solution de (P) sur I <u>ssi</u> x est point fixe de φ.

<u>dém</u> : $\Rightarrow$ claire

$\Leftarrow$ si x est point fixe, $x = \varphi(x)$ donc est dérivable et sa dérivée vaut $x'(t) = f(t, x(t))$. De plus $x(t_0) = x_0$.

$\square$

• Montrons que φ admet un unique point fixe dans F.

Pour cela, d'après le théorème de Picard, il suffit de montrer que φ est contractante.

Soient $x, y \in F$. Soit $t \in I$.

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)(t) - \varphi(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big)\, ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} K \|x(s) - y(s)\|\, ds \right| \\ &\leq h K \|x - y\|_\infty\end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq h K \|x - y\|_\infty \underset{(iv)}{\leq} \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty$.

Donc (P) admet une unique solution sur I.

Ainsi, (P) admet une solution φ sur $[t_0 - h, t_0 + h]$, et par unicité de la solution sur $\underset{t_0 \in}{I} \subset [t_0 - h, t_0 + h]$, φ coïncide avec toute solution sur I.