VM
30/05/15

Fonction caractéristique et moments

Réf : Ouvrard 2
218, 235, 260, 261

Théorème

Soit X une v.a réelle et φ sa fonction caractéristique.

i) Si X admet un moment d'ordre n, alors φ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\forall k \leq n$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

En particulier, $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$. $(*)$.

ii) Si φ est k-fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ donnés par $(*)$.

dém : i) On considère $\varphi : t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \int e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega)$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega \mapsto e^{itX(\omega)}$ est mesurable et intégrable % à $d\mathbb{P}$.
- $\forall k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}(t \mapsto e^{itX(\omega)}) = t \mapsto (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall \omega \in \Omega$, $|(iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}| \leq |X(\omega)|^k$ indépendant de t et intégrable par rapport à $d\mathbb{P}$, car X a un moment d'ordre n donc d'ordre k.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, φ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\varphi^{(k)}(t) = i^k \int X(\omega)^k e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega)$
$= i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

---

ii) Soit $H(n)$ la propriété :

« Si φ est $2n$-fois dérivable en 0, X admet un moment d'ordre $2n$ ».

$H(0)$ est clair.

Montrons que $H(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Soit $n \geq 1$ tel que $H(n-1)$ est vraie.

Soit φ $2n$-fois dérivable en 0. En particulier, φ est $(2n-2)$-fois dérivable en 0, donc d'après $H(n-1)$, X admet

un moment d'ordre $2(n-1)$. Alors, d'après (i), on a
$\forall t\in\mathbb{R}, \quad \varphi^{2(n-1)}(t) = (-1)^{n-1}\, \mathbb{E}\left[X^{2(n-1)} e^{itX}\right]$.

Notons $\psi = \varphi^{2(n-1)}$. ψ est 2-fois dérivable, donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{t^2}{2}\psi''(0) + o(t^2)$$
$$\psi(-t) = \psi(0) - t\psi'(0) + \frac{t^2}{2}\psi''(0) + o(t^2) \quad \text{quand } t\to 0$$

donc $\dfrac{\psi(t)+\psi(-t)-2\psi(0)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \psi''(0)$.

Or $\psi(t)+\psi(-t) = (-1)^{n-1}\,\mathbb{E}\left[X^{2(n-1)}\left(e^{itX}+e^{-itX}\right)\right]$

$$= (-1)^{n-1}\, 2\, \mathbb{E}\left[X^{2(n-1)}\cos(tX)\right].$$

$$\frac{\psi(t)+\psi(-t)-2\psi(0)}{t^2} = (-1)^n\, 2\, \mathbb{E}\left[X^{2(n-1)}\,\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right].$$

Soit (t_p) une suite tendant vers 0.
$X^{2(n-1)}\dfrac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}$ est une v.a. positive, donc

le lemme de Fatou donne :

$$\mathbb{E}\left[\limsup_{p\to+\infty} X^{2(n-1)}\frac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}\right] \leq \limsup_{p\to+\infty} \mathbb{E}\left[X^{2(n-1)}\frac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}\right]$$

$$\mathbb{E}\left[X^{2(n-1)}\frac{X^2}{2}\right] \qquad = \frac{1}{2}(-1)^n \limsup_{p\to+\infty}\frac{\psi(t_p)+\psi(-t_p)-2\psi(0)}{t_p^2}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n\psi''(0)$$

donc $\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] \leq (-1)^n\varphi^{(2n)}(0) < +\infty$

donc X admet un moment d'ordre $2n$.

Ainsi, si φ est k-fois dérivable en 0, φ est $2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$-fois dérivable en 0 donc admet un moment d'ordre $2\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$, et de tout ordre inférieur.