VM
28/11/14

101, 104, 105, 106

Théorème de Brauer

Énoncé : On définit P_σ la matrice de permutation de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par
$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}).$$

Soit K un corps quelconque. Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, $n \geq 2$.
Alors σ et τ sont conjugués si et seulement si P_σ et P_τ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(K)$.

---

dém : Tout d'abord, l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathfrak{S}_n \to GL_n(K) \\ \sigma \mapsto P_\sigma \end{array}$ est un morphisme de groupes. Ainsi, si σ et τ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$, alors P_σ et P_τ sont semblables dans $GL_n(K)$.

Réciproquement, supposons P_σ et P_τ semblables dans $GL_n(K)$.
On note, pour $p \in \{1, \dots, n\}$, $c_p(\sigma)$ le nombre de p-cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

Rq : $c_1(\sigma)$ désigne le nombre de points fixes de σ (remarque orale)
$c_p(\sigma)$ est le nombre d'orbites de cardinal p pour l'action naturelle de $\langle \sigma \rangle$ sur $\{1, \dots, n\}$.

Soit $v = \begin{pmatrix} c_1(\sigma) - c_1(\tau) \\ \vdots \\ c_n(\sigma) - c_n(\tau) \end{pmatrix}$. But : trouver $B \in GL_n(K)$ telle que $Bv = 0$.

Alors σ et τ ont le même nombre de p-cycles pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$ et ils sont donc conjugués.

- $w \in \operatorname{Ker}(P_\sigma - I_n) \iff P_\sigma w = w$
$$\iff \begin{pmatrix} w_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ w_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$
$\iff w_i = w_j$ dès que i et j appartiennent à la même orbite sous l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\{1, \dots, n\}$.

Ainsi, $n_\sigma = \dim \mathrm{Ker}(P_\sigma - I_n) =$ nombre d'orbites sous l'action de $<\sigma>$ sur $\{1,\dots,n\}$

$$= \sum_{p=1}^{n} c_p(\sigma).$$

Or, pour tout $k \geq 1$, P_σ^k et P_τ^k sont semblables, donc

$n_{\sigma^k} = n_{\tau^k}$.

$\dim(P_{\sigma^k} - I_n) = \dim(P_{\tau^k} - I_n)$

Lemme 1 : Soit $c = (a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{S}_p$ un p-cycle.

Alors c^k se décompose en produit de $p \wedge k$ cycles à supports disjoints de longueur $\frac{p}{p \wedge k}$.

(démontré à la fin)

Ainsi $n_{\sigma^k} = \sum_{p=1}^{n} c_p(\sigma)(p \wedge k)$.

Donc pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $\sum_{p=1}^{n} c_p(\sigma)(p \wedge k) = \sum_{p=1}^{n} c_p(\tau)(p \wedge k)$

Donc $Bv = 0$ avec $B = (i \wedge j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Lemme 2 : B est inversible.

Ce qui conclut la preuve.

---

dém du lemme 1 : L'orbite de a_i sous l'action de $<c^k>$ est

$$\{a_{i+nk \pmod p} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Le cardinal de cette orbite est donc le plus petit $n \geq 1$ tel que $nk \equiv 0\ (p)$.

$nk \equiv 0\ (p) \iff p$ divise $nk \iff \frac{p}{p \wedge k}$ divise $n \frac{k}{p \wedge k}$

(lemme de Gauss) $\iff \frac{p}{p \wedge k}$ divise n.

Donc le plus petit n est $\frac{p}{p \wedge k}$.

---

dém du lemme 2 : $i \wedge j = \sum_{d \mid (i \wedge j)} \varphi(d) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) a_{di} a_{dj}$

où $A = (a_{i,j})$ est définie par : $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc $B = {}^tA \begin{pmatrix} \varphi(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(n) \end{pmatrix} A$ et

$\det B = (\det A)^2 \prod_{i=1}^{d} \varphi(i)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

donc $\det A = 1$

D'où $\det B > 0$.