V14
2/05/15
1

Théorème de Bézout faible

142, 143, 144, 152

Théorème : Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X,Y]$ sans facteur commun, ie $\mathrm{pgcd}_{\mathbb{C}[X][Y]}(P,Q) = 1$.

Soit $d \geq 1$ le degré total de P,
$d' \geq 1$ ——— de Q.

On note $V(P) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x,y) = 0\}$, idem $V(Q)$.

Alors $V(P) \cap V(Q)$ est de cardinal au plus dd'.

dém : P et Q peuvent être vus comme éléments de $\mathbb{C}[X][Y]$.

Soit p le degré de P en Y.
q ——— Q ——.

$$P(X,Y) = \sum_{k=0}^{p} P_k(X) Y^k \qquad \deg P_k \leq d-k$$

$$Q(X,Y) = \sum_{k=0}^{q} Q_k(X) Y^k . \qquad \deg Q_k \leq d'-k .$$

On pose $R(X) = \mathrm{Res}_Y(P(X,Y), Q(X,Y)) \in \mathbb{C}[X]$.

Montrons que i) R est non nul

ii) $\deg R \leq dd'$

i) Si $R = 0$, alors $\mathrm{pgcd}_{\mathbb{C}[X][Y]}(P,Q) \neq 1$

donc $\mathrm{pgcd}_{\mathbb{C}[X][Y]}(P,Q)$ non constant : exclu par hypothèse.

ii) On a
$$R(X) = \begin{vmatrix} P_p(X) & & (0) & Q_q(X) & & (0) \\ \vdots & \ddots & P_p(X) & \vdots & \ddots & Q_q(X) \\ P_0(X) & & \vdots & Q_0(X) & & \vdots \\ (0) & & P_0(X) & (0) & & Q_0(X) \end{vmatrix} = \det\left(R_{ij}(X)\right)_{ij} .$$

$$R(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^{p+q} R_{\sigma(j)j}(X)}_{=: R_\sigma(X)} .$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$. $\deg R_\sigma \leq \sum_{j=1}^{p+q} \deg R_{\sigma(j)j}$.

Si $j \in \{1, \dots, q\}$, $R_{ij}(X) = \begin{cases} P_{p-i+j}(X) & \text{si } j \leq i \leq p+j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $j \in \{q+1, \dots, p+q\}$, $R_{ij}(X) = \begin{cases} Q_{j-i}(X) & \text{si } j-q \leq i \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc · si $j \in \{1, \dots, q\}$, $\deg R_{ij} \leq d-p+i-j$

· si $j \in \{q+1, \dots, p+q\}$, $\deg R_{ij} \leq d'+i-j$.

Donc $\deg R_\sigma \leq \sum_{j=1}^{q} (d-p+\sigma(j)-j) + \sum_{j=q+1}^{q+p} (d'+\sigma(j)-j)$

$\leq q(d-p) + pd'$ car $\sum_j (\sigma(j)-j) = 0$.

$\left(= (\underset{\leq d'}{q}-d')(d-p) + dd'\right)$

$\leq dd'$ car $q-d' \leq 0$, $d-p \geq 0$.

Ainsi, $\deg R \leq dd'$ car $\deg R \leq \max(\deg R_\sigma)$.

On déduit de (i) et (ii) que R a au plus dd' racines distinctes :

$$\left| \{ x \in \mathbb{C} \mid \exists y \in \mathbb{C},\ P(x,y) = Q(x,y) = 0 \} \right| \leq dd'. \ (*)$$

On fait de même avec $S(Y) = \mathrm{Res}_X(P(X,Y), Q(X,Y))$ et on trouve que

$$\left| \{ y \in \mathbb{C} \mid \exists x \in \mathbb{C},\ P(x,y) = Q(x,y) = 0 \} \right| \leq dd'.$$

Donc $|V(P) \cap V(Q)| \leq (dd')^2$.

On affine cette majoration : on note $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ les éléments de $V(P) \cap V(Q)$.

VM
2/05/15
2

Si tous les α_i sont distincts, alors $n \leq dd'$ par $(*)$.

Il s'agit de se ramener à ce cas.

On remarque que les droites $(y = \alpha_i + x\beta_i)$ ont deux à deux au plus un point d'intersection. Comme $\mathbb{C}$ est infini, il existe $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, on ait

$$\alpha_i + x_0 \beta_i \neq \alpha_j + x_0 \beta_j .$$

On pose ensuite $\tilde{P}(X, Y) = P(X - x_0 Y, Y)$

$\tilde{Q}(X, Y) = Q(X - x_0 Y, Y)$

$(\alpha, \beta) \in V(P) \cap V(Q)$ ssi $P(\alpha, \beta) = 0 = Q(\alpha, \beta)$

ssi $P(\alpha + x_0\beta - x_0\beta, \beta) = Q(\alpha + x_0\beta - x_0\beta) = 0$

ssi $\tilde{P}(\alpha + x_0\beta, \beta) = \tilde{Q}(\alpha + x_0\beta, \beta) = 0$

ssi $(\alpha + x_0\beta, \beta) \in V(\tilde{P}) \cap V(\tilde{Q})$.

En particulier, $|V(P) \cap V(Q)| = |V(\tilde{P}) \cap V(\tilde{Q})| \leq dd'$ d'après le premier cas d'où la conclusion.