VM
2/05/15
1

Théorème de Barány

181

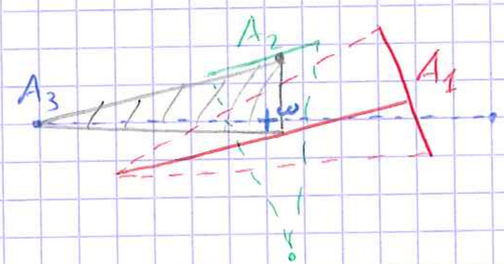
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n.

Soit $m \geq n+1$. Soient $A_1, \dots, A_m$ des parties de $\mathcal{E}$.

On appelle convexe multicolore tout convexe de la forme $\text{conv}(a_1, \dots, a_m)$, où $(a_1, \dots, a_m) \in \prod_{i=1}^{m} A_i$.

Théorème : Soit $\omega \in \mathcal{E}$.

Si $\omega \in \bigcap_{i=1}^{m} \text{conv}(A_i)$, alors il existe un convexe multicolore S tel que $\omega \in S$.



dém : D'après le théorème de Carathéodory, on peut supposer que chaque A_i est de cardinal au plus $n+1$. Ainsi, il existe un nombre fini de convexes multicolores et il en existe un, noté S, tel que $d = d(\omega, S) = \min\limits_{C \text{ convexe multicolore}} d(\omega, C)$.

On va montrer que $d = 0$. Comme S est fermé, ce sera suffisant pour prouver que $\omega \in S$.

Supposons par l'absurde $d > 0$.

On munit $\vec{\mathcal{E}}$ d'une structure euclidienne.

Soit p le projeté orthogonal de ω sur le convexe fermé S.

On a (i) $\|\vec{p\omega}\| = d > 0$

(ii) $\forall z \in S$, $\vec{pz} \cdot \vec{p\omega} \leq 0$.

On note $H = \{x \in \mathcal{E} \mid \vec{px} \cdot \vec{p\omega} = 0\}$ l'hyperplan affine passant par p, de vecteur normal $\vec{p\omega}$. H est un hyperplan d'appui pour S.

On pose $H^- = \{x \in \mathcal{E} \mid \vec{px} \cdot \vec{pw} \leq 0\}$: c'est un convexe fermé contenant S par (ii).

On pose $H^+_* = \{x \in \mathcal{E} \mid \vec{px} \cdot \vec{pw} > 0\}$: c'est un convexe ouvert contenant w par (i).

<u>Lemme</u> : L'ensemble des points extrémaux de $S \cap H$ vérifie $Ext(S \cap H) = Ext(S) \cap H$.) à démontrer à la fin.

<u>dém</u> : • Soit $x \in Ext(S) \cap H$.

$S \setminus \{x\}$ est convexe donc $\underbrace{S\setminus\{x\} \cap H}_{= (S \cap H) \setminus \{x\}}$ est convexe

Ainsi $x \in Ext(S \cap H)$ car $x \in S \cap H$.

• Soit $x \in Ext(S \cap H)$. En particulier, $x \in S \cap H$ donc $x \in H$.

Soient $a, b \in S$ tels que $x = \frac{a+b}{2}$.

Soit φ une forme linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi|_H = \lambda$.

On a $\varphi(x) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} = \lambda$.

H hyperplan d'appui, donc on a par exemple $\varphi(a) \leq \lambda$, $\varphi(b) \leq \lambda$.

Comme $\lambda = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \leq \lambda$, il y a égalité : $\varphi(a) = \varphi(b) = \lambda$

donc $a, b \in H \cap S$. Or $x \in Ext(S \cap H)$, donc $x = a = b$.

Ainsi $x \in Ext(S)$. □

D'après le théorème de Krein-Milman, comme $S \cap H$ est un convexe compact, $S \cap H = Conv(Ext(S \cap H))$.

Ainsi $p \in Conv((Ext S) \cap H) \subset Conv(\underbrace{\{a_1, \dots, a_m\}}_{\in A_1 \times \dots \times A_m} \cap H)$.

H est de dimension $n-1$, donc par le théorème de Carathéodory, quitte à renuméroter, $\exists q \leq n \leq m$ tels que

$p \in Conv(\{a_1, \dots, a_q\})$ où $a_i \in H \cap A_i$.

V14
2/05/15
2

. Or $\omega \in \mathrm{Conv}(A_m) \cap H_*^+$, donc comme H^- est convexe, il existe $b_m \in A_m \cap H_*^+$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On pose $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)p + \varepsilon b_m \in [p, b_m]$.

$$d(\omega, x_\varepsilon)^2 = \|\omega - x_\varepsilon\|^2 = \|\omega - (1-\varepsilon)p - \varepsilon b_m\|^2$$
$$= \|\omega - p\|^2 + 2\varepsilon \langle \omega - p, p - b_m \rangle + \varepsilon^2 \|b_m - p\|^2$$
$$= d^2 + \varepsilon\Big[-2 \underbrace{\vec{p\omega}\cdot\vec{pb_m}}_{>0} + \varepsilon \|b_m - p\|^2\Big]$$
$$< d^2 \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Or $x_\varepsilon \in \mathrm{Conv}(\{p, b_m\}) \subset \mathrm{Conv}(\{a_1, \dots, a_q, b_m\}) = \tilde{S}$

↳ convexe multicolore.

$d(\omega, \tilde{S}) \leq d(\omega, x_\varepsilon) < d$: absurde.