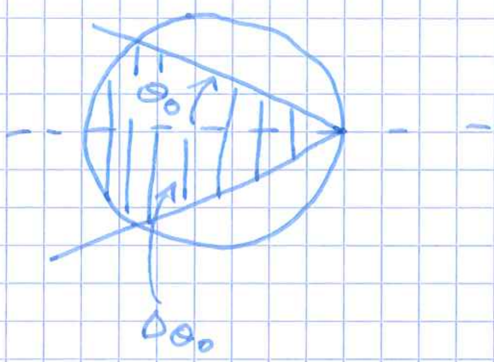
VM
5/01/15
1

# Théorème d'Abel  230, 243, 244

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence 1.
On note $f(z)$ la somme de la série sur le disque $D = D(0,1)$.
On suppose que $\sum a_n$ converge. On note $S = \sum a_n$.

Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

On note $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1$ et $1 - z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0] \}$




## Théorème (Abel)

Sous ces hypothèses, $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S$.

dém: Soit $R_n = \sum\limits_{k \geq n+1} a_k$. Donc $\forall n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Ainsi $\forall z$, $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (R_{k-1} - R_k) z^k$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} R_{k-1} z^k - \sum_{k=1}^{+\infty} R_k z^k$$

car $(R_k)_{k \geq 0}$ tend vers 0 (car la série converge), donc est bornée et ces deux séries sont donc bien convergentes car $|z| < 1$.

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^{k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} R_k z^k$$

$$= \underbrace{a_0}_{S - R_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} R_k z^k (z-1) + R_0 z$$

Donc $f(z) - S = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k (z-1)$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$.

on a $|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k \right|$

$$\leq |z-1| \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| + \underbrace{\varepsilon |z-1| \sum_{k=N}^{+\infty} |z|^k}_{\leq \frac{\varepsilon |z-1|}{1-|z|}}.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $|1-z| < \alpha$,

$$|z-1| \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| \leq \varepsilon$$

donc $|f(z) - S| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon |z-1|}{1-|z|}$.

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$. Alors $1 - z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$.

$z = 1 - \rho e^{i\theta}$ donc $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$

Ainsi $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho(1+|z|)}{1-|z|^2} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2}$

Or $1 - |z|^2 = \rho(2\cos\theta - \rho) \geq \rho(2\cos\theta_0 - \rho)$.

Ainsi, si $\rho \leq \cos\theta_0$ ($\cos\theta_0 > 0$), on a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{\rho(2\cos\theta_0 - \cos\theta_0)} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

D'où $\forall z \in \Delta_{\theta_0}$, $|1-z| \leq \min(\alpha, \cos\theta_0)$,

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right).$$

Donc $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S$.

VM
12/06/15
2

Suite de thm d'Abel :

Application : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

En effet, d'après le critère des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

De plus, la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ a un rayon de convergence valant 1. Ainsi, le théorème d'Abel donne en particulier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \ln(1+x) = \ln 2.$$

□