
Décomposition de Dunford

Proposition — Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal μ_f de f est scindé :

$$\mu_f = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{r_i}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on note

$$V_i = \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i}.$$

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, la projection sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$ est un polynôme en f .

DÉMONSTRATION

D'après le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^m V_i$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{r_j}$.

Comme le pgcd des Q_i est 1, par identité de Bézout, il existe $(U_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket} \in \mathbb{K}[X]^m$ tel que

$$\sum_{i=1}^m U_i Q_i = 1.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on pose $p_i = U_i Q_i(f)$ et on a

$$\sum_{i=1}^m p_i = \text{Id}.$$

Soient $i \neq j$.

Alors $p_i \circ p_j = (U_i Q_i)(U_j Q_j)(f) = (U_i U_j)(Q_i Q_j)(f) = 0$ car μ_f divise $Q_i Q_j$.

Soit $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

Alors $p_i \circ \sum_{j=1}^m p_j = p_i \circ p_i$.

Donc $p_i^2 = p_i$ qui est bien une projection.

Soit $y = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$.

Alors

$$(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i} \circ p_i(x) = (X - \lambda_i)^{r_i} U_i Q_i(f)(x) = (U_i \mu_f)(f)(x) = 0$$

soit

$$y \in \ker(f - \lambda_i \text{Id})^{r_i} = V_i.$$

Soit $x \in V_i$.

On sait que $x = \sum_{j=1}^m p_j(x) = p_i(x)$ car $\forall j \neq i, (X - \lambda_i)^{r_i} \mid Q_j \mid U_j Q_j$.

Donc

$$\text{Im}(p_i) = V_i.$$

De manière immédiate, les $V_j, j \neq i$ sont inclus dans $\ker Q_i(f) \subset \ker p_i$.

D'où

$$\bigoplus_{j \neq i} V_j \subset \ker p_i.$$

De plus

$$\forall x \in \ker p_i, x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} V_j.$$

On a montré que p_i est la projection sur V_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} V_j$. □

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ scindé.

Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathbb{K}[f]^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente telles que

$$f = d + n \text{ et } d \circ n = n \circ d.$$

DÉMONSTRATION

Existence On peut appliquer la proposition précédente et on conserve les notations introduites.

On pose

$$d = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i.$$

Alors

$$\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \forall x \in V_i, d(x) = \lambda_i x.$$

d est donc diagonalisable.

De plus on définit

$$n = f - d.$$

Alors

$$\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \forall x \in V_i, n(x) = f(x) - \lambda_i x.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, V_i étant un sous-espace stable de f , $n_i = n|_{V_i}$ est un endomorphisme de V_i .

Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, n_i est nilpotent car d'unique valeur propre 0 de multiplicité $\dim V_i$. On note son ordre r_i .

On note

$$r = \max_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket} r_i.$$

n^r s'annule sur chaque V_i , donc s'annule sur E .

Comme d et $n = f - d$ sont des polynômes en f , ils commutent.

Unicité Soient (d, n) et (d', n') deux couples d'endomorphismes qui conviennent.

On remarque que

$$f \circ d' = (d' + n') \circ d' = d' \circ (d' + n') = d' \circ f.$$

Comme d' et f commutent, les espaces caractéristiques de f sont stables par d' .

On en déduit que, pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$,

$$\begin{aligned} d'|_{V_i} \circ d|_{V_i} &= d'|_{V_i} \circ \lambda_i \text{Id}_{V_i} \\ &= \lambda_i \text{Id}_{V_i} \circ d'|_{V_i} = d|_{V_i} \circ d'|_{V_i} \end{aligned}$$

Donc d et d' commutent.

Comme d et d' sont diagonalisables, elles sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire diagonalisables dans une même base.

En particulier $d - d'$ est diagonalisable.

Comme d et d' commutent, on en déduit que n et n' commutent.

On note r et r' les ordres de nilpotence de n et n' respectivement.

$$\begin{aligned} (n - n')^{r+r'} &= \sum_{i=0}^{r+r'} \binom{r+r'}{i} n^i \circ (-1)^{r+r'-i} (n')^{r+r'-i} \\ &= \left(\sum_{i \geq r} \binom{r+r'}{i} n^i \circ (-1)^{r+r'-i} (n')^{r+r'-i} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i < r} \binom{r+r'}{i} n^i \circ (-1)^{r+r'-i} (n')^{r+r'-i} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $n - n' = d - d'$ est nilpotente. Or $d - d'$ est diagonalisable.

Donc $d - d' = n - n' = 0$.

□

Application — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors M est diagonalisable ssi e^M l'est.

DÉMONSTRATION

Si M est diagonalisable alors e^M l'est immédiatement.

On suppose e^M diagonalisable.

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, M admet une décomposition de Dunford $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent.

Alors

$$\begin{aligned} e^M &= e^{D+N} = e^D \cdot e^N \text{ car } D \text{ et } N \text{ commutent} \\ &= e^D + e^D(e^N - I_n) \end{aligned}$$

Comme la matrice e^D est diagonalisable et la matrice $e^N - I_n$ est nilpotente (et commute avec e^D), c'est la décomposition de Dunford de e^M .

Comme e^M est diagonalisable, $e^D(e^N - I_n) = 0$ donc $e^N = I_n$.

Or $e^N = I_n + N(I_n + N')$ avec N' nilpotente.

Comme N' est nilpotente, $I_n + N'$ est inversible donc $N = 0$.

On conclut $M = D$ diagonalisable. □

Corollaire — $\ker \exp = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable tel que } \operatorname{Sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}\}.$