

Analyticité des fonctions holomorphes.

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}(\Omega)$ les fonctions holomorphes sur Ω ,
 $\mathcal{A}(\Omega)$ les fonctions analytiques sur Ω .

Théorème : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Preuve : Pour tout $r > 0$, on note :

$$D(r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, et $f \in \mathcal{H}(D(R))$.

Montrons d'abord que f est analytique sur $D(R)$
en 3 étapes

- ① Un résultat d'analyticité.
- ② Analyticité de f .
- ③ Conclusion.

Soit g une fonction continue sur $\partial D(r)$,
à valeur dans $\mathbb{C}$, et considérons l'application :

$$\Psi_g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(re^{it}) re^{it}}{re^{it} - z} dt, \text{ pour } z \in D(r).$$

Comme $t \mapsto \frac{g(re^{it}) re^{it}}{re^{it} - z}$, est continue sur
 $[0, 2\pi]$, pour tout $z \in D(r)$, $z \mapsto \Psi_g(z)$ est
bien définie.

Montrons que ψ_g est analytique sur $D(r)$.

On a:

$$\psi_g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) \times \frac{1}{1 - \frac{z}{re^{it}}} dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} g(re^{it}) \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-int}}_{g_n(t)} dt.$$

Soit r_0 , tel que $|z| \leq r_0 < r$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto g_n(t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.
- Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times [0, 2\pi]$, on a:

$$|g_n(t)| \leq |g(re^{it})| \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \quad \left(\frac{r_0}{r} < 1\right)$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge normalement dans
uniformément, on peut donc intervertir somme
et intégrale:

$$\psi_g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) \frac{e^{-int}}{r^n} dt \right) z^n, \quad (*)$$

pour tout $z \in D(r)$.

Donc ψ_g est analytique sur $D(r)$.

② Montrons que f analytique sur $D(r)$.

Considérons l'application :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \lambda(re^{it} - z))}{re^{it} - z} re^{it} dt.$$

pour $\lambda \in [0,1]$, $r \in]0, R[$, $z \in D(r)$.

Remarquons deux choses :

1. $\varphi(1)$ est analytique sur $D(r)$, car.
 $\varphi(1) = f(z)$

2. $\varphi(0) = f(z)$, en effet d'après ~~②~~, on pose $g(z) = g(re^{it})$, on a :

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \times f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z} dt.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \times f(z) \int_0^{2\pi} e^{-cnt} dt \right) z^n.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ f(z) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Montrons donc que φ est constante sur $[0,1]$,
et on aura $\varphi(0) = \varphi(1) = f(z)$.

Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $t \mapsto \frac{f(z + \lambda(re^{it} - z))}{re^{it} - z} re^{it}$
est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\lambda \mapsto \frac{f(z + \lambda(re^{it} - z))}{re^{it} - z} re^{it}$
est C^1 , car f est holomorphe.

Donc φ est dérivable et on peut dériver sous l'intégrale :

$$\varphi'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z + \lambda(re^{it} - z)) re^{it} dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_0^{2\pi} i \lambda r e^{it} f'(z + \lambda(re^{it} - z)) dt.$$

$$= \frac{1}{2\pi i \lambda} \left[f(z + \lambda(re^{it} - z)) \right]_0^{2\pi}.$$

$$= 0$$

φ est donc constante sur $[0,1]$, et on a :

$$\varphi(1) = \varphi(0)$$

D'après la première partie ①, ainsi que les deux remarques a. et b., f est analytique sur $D(r)$.

Elle est donc somme de sa série de Taylor
sur $D(r)$, $r \in]0, R[$, donc sur $D(R)$,
car les $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ne dépendent pas de r .

③ Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit $z_0 \in \Omega$, $r > 0$,
tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$.

Alors $z \mapsto f(z_0 + z)$ est holomorphe sur
 $D(r)$, et donc analytique.

Donc $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.