2.22 Quaternions et isomorphismes exceptionnels

Théorème : On a un isomorphisme exceptionnel $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{I}_2\} \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Démonstration : On utilise la norme sur $\mathbb{H}$ donnée par $N(h) = h\bar{h}$ induite par $\langle h\,;\,h'\rangle = \dfrac{1}{2}\left(h\overline{h'} + h'\bar{h}\right)$. La base $(\mathbb{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathbb{H}$ est clairement orthonormée, et le sous-espace $\mathbb{I} = \mathrm{Vect}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est donc $(\mathbb{R}\mathbb{1})^{\perp}$.
On dispose d'une opération de $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \overset{\text{op}}{\curvearrowright} \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ par automorphismes d'algèbres via :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\ h & \longmapsto & \varphi_h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ u & \longmapsto & huh^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut la transformer en un morphisme $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathbb{I}) \\ h & \longmapsto & \varphi_h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ u & \longmapsto & huh^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$ [86] et via le choix d'une base, on a un isomorphisme $\mathcal{O}(\mathbb{I}) \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et par abus on note alors $\varphi : \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
Comme $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \underset{\text{homéo}}{\simeq} \mathbb{S}^3$ est connexe, par continuité de φ [87], $\varphi(\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}))$ est connexe et contient I_2 donc en fait $\varphi : \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Montrons que ce morphisme est surjectif. Pour cela il suffit [88] que tous les retournements de $\mathcal{SO}(\mathbb{I}) \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ soient dans $\varphi(\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}))$. Prenons $h \in \mathbb{I} \cap \mathbb{S}^3$, r_h le retournement d'axe $\mathbb{R}h$ puis montrons $r_h = \varphi_h$:

- $\varphi_h(h) = hhh^{-1} = h$
- Soit h' orthogonal à h. On a donc $\dfrac{1}{2}(h'\bar{h} + h\overline{h'}) = 0$ donc comme h et h' sont dans $\mathbb{I}$ ici [89] donc $h'(-h) + h(-h') = 0$ et alors $hh'h^{-1} = -h' = r_h(h')$.

De plus, $\ker(\varphi) = \mathrm{Com}(\mathbb{I}) \cap \mathbb{S}^3 = Z(\mathbb{H}) \cap \mathbb{S}^3 = \mathbb{R} \cap \mathbb{S}^3 \underset{\text{isom}}{\simeq} \{\pm \mathrm{I}_2\}$. Un passage au quotient conclut.

Théorème : On a des isomorphismes exceptionnels :

$$\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C})/\{(\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2)\} \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{PSO}_4(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{PSO}_4(\mathbb{R}) \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$$

Démonstration : On dispose d'une opération de $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \overset{\text{op}}{\curvearrowright} \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ via :

$$\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\ (h,k) & \longmapsto & \Psi_{h,k} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ u & \longmapsto & huk^{-1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- De même qu'avant, on obtient [90] un morphisme $\Psi : \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$.

Montrons qu'il est surjectif. Soit P un plan de $\mathbb{H}$, de BON (p, q).

86. En effet, φ_h est linéaire et respecte la norme de $\mathbb{H}$. Comme $\mathbb{1}$ est central dans $\mathbb{H}$, l'action de $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C})$ préserve $\mathbb{R}$ donc préserve son orthogonal $\mathbb{I}$.
87. N'interviennent dans son expression que des additions, multiplications et inverses de non nuls.
88. On va utiliser le fait que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements.
89. Dans ce cas particulier uniquement ! On étudie le φ construit par abus, à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbb{I})$.
90. Les vecteurs h, k sont de norme 1, l'application $\Psi_{h,k}$ respecte la norme, donc $\mathrm{Im}(\Psi)$ va dans $\mathcal{O}(\mathbb{H}) \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$, et la connexité de $\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C})$ implique l'inclusion $\mathrm{Im}(\Psi) \subset \mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$.

Montrons que le retournement par rapport à P est dans $\mathrm{Im}(\psi)$. On a la relation :

$$\overline{p^{-1}q} \underbrace{=}_{\text{conjugaison dans } \mathbb{H}} \overline{q} \times \overline{p^{-1}} \underbrace{=}_{\overline{p}p=\mathrm{Id}} \overline{q}p \underbrace{=}_{\langle p\ ;\ q\rangle=0} -\overline{p}q \underbrace{=}_{\overline{p}p=\mathrm{Id}} -p^{-1}q$$

On en déduit $v = p^{-1}q \in \mathbb{I} \cap \mathbb{S}^3$ et donc [91] $\Psi_{v,v}$ est un retournement. Ainsi $\Psi_{p,1}\Psi_{v,v}\Psi_{p^{-1},1} = \Psi_{pvp^{-1},v}$, qui est dans la classe de conjugaison, est aussi un retournement. On vérifie aisément que $\Psi_{pvp^{-1},v}(p) = p$ et $\Psi_{pvp^{-1},v}(q) = q$ [92] et c'est donc le retournement cherché.

- Soit $(h,k) \in \ker(\Psi)$. La relation $huk^{-1} = u$ pour tout $u \in \mathbb{H}$ nous donne en posant $u = \mathrm{Id}$, que $h = k$. Comme $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, on en déduit $\ker(\Psi) = \{(\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2)\}$. Par passage au quotient, on a donc :

$$\mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \big/ \{(\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2)\} \underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$$

On en déduit : [93]

$$\begin{aligned}
\mathcal{PSO}_4(\mathbb{R}) &\underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \big/ \{(\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2), (-\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2)\} \\
&\underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \big/ \{\pm \mathrm{I}_2\} \times \mathcal{SU}_2(\mathbb{C}) \big/ \{\pm \mathrm{I}_2\} \\
&\underset{\text{isom}}{\simeq} \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Remarque : Ce résultat est topologiquement remarquable, puisque l'on obtient la connexité de $\mathcal{PSO}_4(\mathbb{R})$, et algébriquement dramatique puisque l'on obtient la non simplicité de $\mathcal{PSO}_4(\mathbb{R})$ au contraire de ses analogues $\mathcal{PSO}_n(\mathbb{R})$ pour $n = 3$ ou $n \geqslant 5$.

Référence : Un si beau résultat, forcément, c'est dans [CG18] [94]
- Caldero-Germoni ; *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie , II* page 10-12

91. D'après ce que l'on a démontré pour $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, si $h \in \mathbb{I} \cap \mathbb{S}^3$, le retournement r_h correspond à $\varphi_h = \Psi_{h,h}$
92. En effet : $\Psi_{pvp^{-1},v}(p) = pvp^{-1}pv^{-1} = p$ et $\Psi_{pvp^{-1},v}(q) = p(p^{-1}q)p^{-1}qq^{-1}p = q$
93. On quotiente par le centre de $\mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$, ce qui fait apparaître les couples $(\mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_2)$ et $(-\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_2)$, puis on utilise le premier théorème.
94. ET PAS DANS LE PERRIN. NON. C'EST NON. J'AI DIS NON !