1.18 Sous-variétés et théorème des extremums liés

Définition : Sous-variété
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$ en l'un de ses points x_0 s'il existe W un voisinage de x_0 et un difféomorphisme $f : W \longrightarrow U$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$ et $M \cap W = f^{-1}\left(U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m)\right)$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & U \\
M \cap W \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^m) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Proposition : Soient $f_1, \cdots, f_{n-m}$ des fonctions différentiables définies sur W, un voisinage d'un $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $f_1(x_0) = \cdots = f_{n-m}(x_0) = 0$ et que $(\mathcal{D}f_i(x_0))_{1 \leqslant i \leqslant n-m}$ sont linéairement indépendantes. Alors l'ensemble $M = \{x \in W \setminus f_1(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m.

Démonstration : Par le théorème de la base incomplète, il existe des formes linéaires $u_1, \cdots, u_m$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ telles que : $(\mathcal{D}f_1(x_0), \cdots \mathcal{D}f_{n-m}(x_0), u_1, \cdots, u_m)$ est une base $(\mathbb{R}^n)^*$. Mais alors en posant pour $k \in [\![1, m]\!]$, $f_{n-m+k} = u_k$, ces fonctions sont différentiables et égales à leurs différentielles [57] et donc la fonction $f = (f_1, \cdots, f_n) : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable, avec $\mathcal{D}f(x_0)$ inversible [58] donc elle réalise un difféomorphisme local de W sur un voisinage de 0. On vérifie enfin sans peine que les axiomes de la définition de sous-variété sont bien vérifiés.

Définition : Espace tangent.
• Version algébrique : Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x_0 \in X$. On appelle espace tangent en x_0 à X, noté $T_{x_0}(X)$, l'image de $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ par l'inverse $(\mathcal{D}f(x_0))^{-1}$ de la différentielle de f en x_0. Cela se note aussi :

$$T_{x_0}(M) = \bigcap_{i=1}^{n-m} \ker\left(\mathcal{D}f_i(x_0)\right)$$

• Version géométrique : Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x \in X$. On appelle espace tangent en x à X, noté $T_x(X)$ [59] la partie de $\mathbb{R}^n$ constituée des vecteurs $\gamma'(0)$ tangents en x aux courbes $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui passent par x en 0 [60], et tracées dans X. Formulé autrement, ces courbes peuvent être vues comme des fonctions $\gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n)$ dont l'image reste dans X, et telles que $\gamma(0) = x$.

Démonstration : Détaillons quand même l'équivalence entre ces définitions :
• Par la définition, $T_m(M)$ est bien un espace vectoriel de dimension $n - k$.
• Par le théorème du rang, en notant $g = (g_1, \cdots, g_k)$, et $T = \bigcap_{i=1}^{n-m} \ker\left(\mathcal{D}f_i(x_0)\right)$:
$\dim(\mathbb{R}^n) = \mathrm{rg}(\mathcal{D}g(m)) + \dim(\ker(\mathcal{D}g(m)))$ or $\ker(\mathcal{D}g(m)) = T$ par construction donc $\dim(T) = n - k$.
• Soit $v \in T_m(M)$, et soit γ associé comme dans la définition. Comme $\mathrm{Im}(\gamma) \subset M$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et tout $t \in I$ on a $g_i(\gamma(t)) = 0$ donc en différentiant : $\mathcal{D}g_i(\gamma(t)) \circ \mathcal{D}\gamma(t) = 0$, et en évaluant en $t = 0$ on trouve $\mathcal{D}g_i(m) \cdot (v) = 0$ donc $v \in T$ et in fine : $T_m(M) \subset T$.

57. Calculées en n'importe quel point, vu que ce sont des formes linéaires.
58. Puisque toutes les $\mathcal{D}f_i(x_0)$ sont linéairement indépendantes !
59. Il me semble opportun d'avoir en tête le dessin d'une sphère et de son plan tangent en un point de sa surface. Vous comprendrez que j'ai un peu la flemme de le faire en LaTeX.
60. Cette valeur 0 est arbitraire, mais c'est plus facile.

Proposition : Théorème de submersion
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m)$ et soit X la ligne de niveau $f^{-1}(\{y\})$ pour un $y \in \mathbb{R}^m$. Si f est une submersion en tout point de X [61], alors X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-m$.

Démonstration : Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant x_0 et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, submersive en x_0. Alors x_0 appartient à la ligne de niveau $M = f^{-1}(\{f(x_0)\})$. Montrons que M est une sous-variété en x_0 de dimension $n-m$, avec $T_{x_0}(M) = \ker(\mathcal{D}f\,(x_0))$:
Notons $f = (f_1, \cdots, f_m)$ en composantes. Alors les les matrices des $(\mathcal{D}f\,(x_i))_{1\leqslant i \leqslant m}$ forment les lignes de la jacobienne de f en x_0, c'est à dire de $J_{x_0}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_m}(\mathcal{D}f\,(x_0))$ où $\mathcal{B}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse, cette matrice est de rang m, donc ses m lignes sont bien linéairement indépendantes. La proposition précédente permet de conclure, en substituant 0 à $f(x_0)$, ce qui est purement accessoire.

Maintenant que nous avons tous les outils, allons-y et passons à la preuve du théorème.

Lemme : Soient $v, u_1, \cdots, u_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $u_1, \cdots, u_k$ sont linéairement indépendantes, et que $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(u_i) \subset \ker(v)$. Alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$

Démonstration : Posons $F = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$ et $D = \mathrm{Vect}(v)$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$.
On a : $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(u_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \forall i \in [\![1,k]\!] \ : \ u_i(x) = 0\} = F^\circ$ et $\ker(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus v(x) = 0\} = D^\circ$, ces deux orthogonaux étant pris au sens de la dualité. L'hypothèse d'inclusion étant $F^\circ \subset D^\circ$, par propriété de dualité, on déduit $D \subset F$, qui est exactement ce que l'on voulait.

Théorème : Extremums liés
Soient $f, g_1, \cdots, g_k : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions $\mathscr{C}^1$. Notons $M = \{x \in U \setminus g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}$.
Si la restriction $f_{|M}$ admet un extremum relatif en $m \in M$, et si les $\mathcal{D}m\,(g_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\mathcal{D}f\,(m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{D}g_i\,(m)$

Démonstration : On remarque que M est bien une sous-variété [62]

- Par définition de l'espace tangent, on a $T_m(M) = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\mathcal{D}g_i\,(m))$. Pour conclure, on va appliquer le lemme, et pour cela il suffit de vérifier que $T_m(M) \subset \ker(\mathcal{D}f\,(m))$:
- Soit $v \in T_m(M)$. Il existe alors un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui contient 0, tel que $\gamma \in \mathscr{C}^1(I \longrightarrow M)$ vérifie $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$. Alors par construction, comme $\mathrm{Im}(\gamma) \subset M$: $f_{|M} \circ \gamma = f \circ \gamma$. La fonction f admet un extremum en m par hypothèse, ie le membre de gauche admet un extremum en $t = 0$, ce qui implique l'annulation de la différentielle en $t = 0$:

$$[t \mapsto \mathcal{D}f\,(\gamma(t)) \cdot (\mathcal{D}\gamma\,(t))]_{|t=0} = \mathcal{D}f\,(m) \cdot (v) = 0$$

Références : [CG18] pour l'intro, [Ave83] et [63] pour le reste.

- Caldero-Germoni ; *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, II* ; page 83-84
- Avez ; *Calcul différentiel* ; page 103

61. C'est à dire si $\mathcal{D}f\,(x)$ est surjective en tout $x \in X$.
62. $M = g^{-1}(0_{\mathbb{R}^k})$, pour $g = (g_1, \cdots, g_k)$ et la famille $(\mathcal{D}g_i\,(a))_{1\leqslant i\leqslant k}$ est libre par hypothèse donc $\mathcal{D}g\,(a)$ est surjective.
63. Marie, du site https://agreg-maths.fr/developpements/224, auteure d'une version bien détaillée, que j'ai grandement exploité.