Inégalité de Hadamard et déterminant de Gram

Florian DUSSAP

Agrégation 2018

Théorème 1 (inégalité de Hadamard). *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de M. Alors :*

$$|\det M| \leqslant \|X_1\| \cdots \|X_n\|$$

où $\|X\| = \sqrt{X^* X}$. De plus, il y a égalité ssi les (X_i) sont orthogonaux.

Démonstration. Si $\det M = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, les $X_1, \ldots, X_n$ forment une base de $\mathbf{C}^n$. Par Gram–Schmidt, il existe $Y_1, \ldots, Y_n$ une base orthogonale de $\mathbf{C}^n$ telle que :

$$\forall k,\ Y_k = X_k + \lambda_{1,k} Y_1 + \cdots + \lambda_{k-1,k} Y_{k-1} \qquad \lambda_{j,k} \in \mathbf{C}$$

Posons N la matrice dont les colonnes sont les $Y_1, \ldots, Y_n$. Puisqu'on ne change pas le déterminant d'une matrice lorsque que l'on retranche à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, les matrices M et N ont le même déterminant.

Les (Y_k) sont orthogonaux, donc la matrice $N^* N$ s'écrit :

$$N^* N = \begin{pmatrix} & & \\ & Y_i^* Y_j & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|Y_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|Y_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det(N^* N) = |\det N|^2 = \|Y_1\|^2 \cdots \|Y_n\|^2$, donc $|\det N| = \|Y_1\| \cdots \|Y_n\|$. Par ailleurs, par orthogonalité des (Y_i) :

$$(*) \quad \|X_k\|^2 = \|Y_k\|^2 + |\lambda_{1,k}|^2 \|Y_1\|^2 + \cdots + |\lambda_{k-1,k}|^2 \|Y_{k-1}\|^2$$

Donc $\|Y_k\| \leqslant \|X_k\|$ pour tout k. Finalement :

$$(**) \quad |\det M| = |\det N| = \|Y_1\| \cdots \|Y_n\| \leqslant \|X_1\| \cdots \|X_n\|$$

ce qui établit l'inégalité.

Déterminons les cas d'égalité. Si les (X_k) sont orthogonaux, alors pour tout k, $X_k = Y_k$ et l'inégalité est une égalité. Réciproquement, supposons qu'on ait l'égalité. Comme $\det M \neq 0$, alors on a $X_k \neq 0$ pour tout k. L'égalité dans $(**)$ impose que $\|X_1\| \cdots \|X_n\| = \|Y_1\| \cdots \|Y_n\| \neq 0$. Puisque $\|Y_k\| \leqslant \|X_k\|$, on a $\|X_k\| = \|Y_k\|$ pour tout k. Ainsi dans $(*)$, les $\lambda_{j,k}$ doivent être nuls. Donc $X_k = Y_k$ pour tout k et les $X_1, \ldots, X_n$ sont orthogonaux. □

Définition. Soit E pré-hilbertien et soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle matrice de Gram associée aux vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \langle x_i \mid x_j \rangle & \\ & & \end{pmatrix}$$

On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ le déterminant de cette matrice. On le note $G(x_1, \ldots, x_n)$.

Théorème 2. *Soit V un s.e.v. de E de dimension fini $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Soit $x \in E$ et soit $d = \operatorname{dist}(x, V)$. Alors :*

$$d^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$$

Démonstration. Soit y le projeté orthogonal de x sur V et soit $z = x - y$. Alors $d^2 = \|z\|^2$ et par Pythagore $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. De plus, $\langle x \mid e_j \rangle = \langle y \mid e_j \rangle$ pour tout j.

$$\begin{aligned}
G(e_1, \dots, e_n, x) &= \left(\begin{array}{c|c} \langle e_i \mid e_j \rangle & \langle e_i \mid x \rangle \\ \hline \langle x \mid e_j \rangle & \|x\|^2 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \langle e_i \mid e_j \rangle & \langle e_i \mid y \rangle \\ \hline \langle y \mid e_j \rangle & \|y\|^2 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} \langle e_i \mid e_j \rangle & 0 \\ \hline 0 & \|z\|^2 \end{array}\right) \\
&= G(e_1, \dots, e_n, y) + \|z\|^2 \, G(e_1, \dots, e_n)
\end{aligned}$$

Comme $y \in V$, $G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$ donc $G(e_1, \dots, e_n, x) = d^2 \, G(e_1, \dots, e_n)$. □

Référence

— GOURDON, *Les maths en tête, algèbre.*