# Espace des fonctions lipschitziennes.

**Proposition.** *Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On va montrer les trois propositions suivantes.*

1. *$E$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*
2. *Pour $f \in E$, on définit*
$$K(f) := \inf\{k > 0\,,\, \forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$$
*et $N : f \mapsto K(f) + |f(0)|$.*
*Alors $N$ définit une norme sur $E$ qui n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.*
3. *L'espace $(E, N)$ est complet.*

1. Montrons que l'espace $E$ n'est pas fermé dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ donc n'est pas complet. $E$ contient le sous-espace des fonctions polynômes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f$ une fonction continue, non-lipchitzienne, comme par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$. Par le théorème de Weierstraß, on sait qu'il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$. Cette suite est de Cauchy de $E$ pour $\|\cdot\|_\infty$ mais elle ne converge pas dans $E$.

2. Montrons que $N$ est une norme. Dans un premier temps on remarque que $\forall f, g \in E, \forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq (K(f) + K(g))\,|x-y|$ donc $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$. De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $K(\lambda f) = |\lambda| K(f)$.
On remarque aussi que si $K(f) = 0$, alors $f$ est constante (pas forcément nulle).
On obtient alors

   - $\forall f, g \in E$, $N(f+g) = K(f+g) + |f(0)+g(0)| \leq K(f) + |f(0)| + K(g) + |g(0)| = N(f) + N(g)$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$
   - Si $N(f) = 0$ alors $K(f) = 0$ donc $f$ est constante égale à $f(0) = 0$.

   Montrons maintenant que $N$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
Soient $f \in E$ et $x \in [0,1]$. On a $|f(x) - f(0)| \leq K(f)x \leq K(f)$, donc $|f(x)| \leq K(f) + |f(0)| = N(f)$ d'où $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
En revanche, il n'est pas possible de controler $N(f)$ avec la norme infinie. Par exemple, soit $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ pour $n \geq 1$. On a $f_n' : x \mapsto n\cos(nx)$, donc la fonction $f_n$ est $n$-lipschitzienne par le théorème des accroissements finis. En fait, comme le taux d'accroissement $\frac{\sin(nx)}{x}$ tend vers $n$ lorsque $x \to 0^+$; on a $K(f_n) = n$, et donc $N(f_n) = n$. Mais $\|f_n\|_\infty = 1$. Cela prouve que $N$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $E$ pour la norme $N$. Comme $\|\cdot\|_\infty \leq N$, la suite $(fn)$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$. Or on sait que $\mathcal{C}^0[0,1]$ est complet pour la norme infinie. Ainsi, la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue $f$. On va montrer que $f \in E$ puis que $f_n \to f$ au sens de $N$.
Comme $|K(f_n) - K(f_p)| \leq K(f_n - f_p) \leq N(f_n - f_p)$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, la suite $(K(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (qui est complet). Elle converge donc vers un réel positif $K$.
Maintenant, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K(f_n)|x-y|$. En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

donc $f \in E$.

Montrons pour finir que $N(f_n - f)$ tend vers 0. Comme $f_n(0) \to f(0)$, il suffit de prouver que $K(f_n - f) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on peut trouver un rang $M$ tel que $K(f_n - f_p) \leq \varepsilon$ lorsque $n, p \geq M$.

Ainsi, pour $p, n \geq M$, $\forall x, y \in [0,1]^2$, $|f_n(y) - f_p(y) - f_n(x) + f_p(x)| \leq \varepsilon|x - y|$.

Quand $p$ tend vers $+\infty$, $\forall n \geq M$, $\forall (x, y) \in [0,1]^2$, $|f_n(y) - f(y) - f_n(x) + f(x)| \leq \varepsilon|x - y|$, donc $\forall n \geq M$, $K(f_n - f) \leq \varepsilon$ ce qui achève la preuve. $\square$

**Référence.** Francinou, Gianella, Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 3.* **p.131**