Transformée de Fourier d'une gaussienne

Thórème. *Soit a un réel, $a > 0$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:*

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

On pose γ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\gamma_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi} dx$$

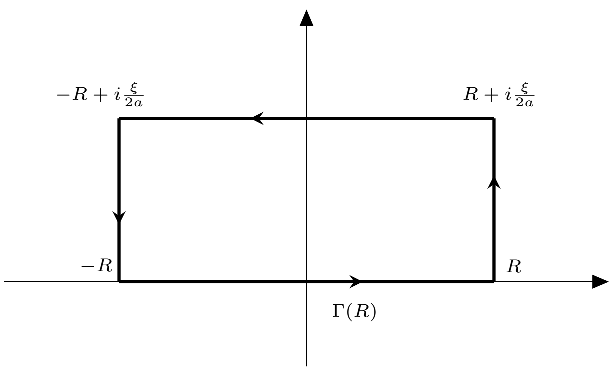
On écrit

$$ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + ix\frac{\xi}{a}\right) = a\left((x + i\frac{\xi}{2s})^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$$

On a alors :

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x + i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dx.$$

Considérons la fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$
Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, notons $\Gamma(R)$ le contour suivant :



On a :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx \quad + i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)} dt \quad - \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dx \quad -i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} dt$$

$$= I_1(R) \quad + I_2(R) \quad - I_3(R) \quad - I_4(R)$$

- Pour $I_1(R)$.
  On sait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ En faisant le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ dans $I_1(\mathbb{R})$, on obtient que $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
- Pour $I_2(R)$. On a

$$|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} |e^{-a(R+it)^2}| dt = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{\Re\left(-a(R+it)^2\right)} dt = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a\left(R^2 - t^2\right)} dt.$$

  De plus, $\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a\left(R^2-t^2\right)} dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2} dt \longrightarrow 0$ lorsque $R \longrightarrow +\infty$.
- Pour $I_4(R)$. On procède exactement de la même manière que pour $I_2(R)$ et on montre que $|I_4(R)| \longrightarrow 0$ quand $R \longrightarrow +\infty$.

- Pour $I_3(R)$. Puisque l'intégrale généralisée

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} dx$$

  converge absolument, d'après ce qu'on a remarqué, on a :

  $$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} = e^{\frac{\xi^2}{4a}}\hat{\gamma}_a(\xi)$$

  La fonction $z \mapsto e^{az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le contour $\Gamma(R)$ est fermé, donc le *théorème de Cauchy* nous donne

  $$\int_{\Gamma(R)} e^{az^2} = 0$$

  On obtient alors, en faisant tendre $R \to +\infty$:

  $$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}}\hat{\gamma}_a(\xi) - 0$$

  Finalement on obtient bien le résultat annoncé.

References

[1] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels: niveau M1*. Ellipses Marketing, 2008 2008.