Densité des matrices diagonalisables (CVA)

Théorème
Notons $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$. Alors $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :

Montrons d'abord que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons que l'on peut approcher A par une suite de matrices diagonalisables.
On sait que A est trigonalisable, i.e qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure tels que $A = PTP^{-1}$. Notons $(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_k, ..., \lambda_k)$ les éléments diagonaux de T, où les λ_i sont distincts.
Posons alors ε tel que $\begin{cases} \varepsilon > 0 \text{ si tous les } \lambda_i \text{ sont égaux,} \\ 0 < \varepsilon \leq min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| \text{ sinon.} \end{cases}$
et $T_\varepsilon := T + diag(\frac{\varepsilon}{1}, ..., \frac{\varepsilon}{n})$.
Montrons alors que T_ε n'a que des coefficients distincts sur la diagonale principale.
En effet, si tous les λ_i sont égaux, n'importe quel ε convient.
Sinon, par l'absurde, supposons qu'il existe $s < r \in [\![1; n]\!]$ tel que $\lambda_i + \frac{\varepsilon}{s} = \lambda_j + \frac{\varepsilon}{r}$, où $i \leq j \in [\![1; k]\!]$. Si $i = j$, c'est impossible car $s < r$. Sinon, on a :

$$|\lambda_i - \lambda_j| = \varepsilon |\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{r}| \leq \varepsilon (1 - \tfrac{1}{r}) < \varepsilon$$

d'où la contradiction.
T_ε est donc diagonalisable et tend vers T lorsque ε tend vers 0. On obtient donc que $PT_\varepsilon P^{-1}$ est diagonalisable et, par continuité du produit matricielle, tend vers A.
$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons à présent que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.
On a déjà une première inclusion en utilisant la même méthode que précédemment : $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$.
Réciproquement, montrons que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on aura ainsi $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ donc l'inclusion réciproque par passage à l'adhérence. Pour cela montrons la propriété suivante :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $|Im(z)|^n \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Supposons que $|Im(z)|^n \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Une racine de P vérifie donc $Im(z) = 0$, elle est donc réelle, ce qui prouve que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
Réciproquement, supposons P scindé sur $\mathbb{R}$: $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - x_k)$, $x_k \in \mathbb{R}$.

Alors $|P(z)|^2 = \prod_{k=1}^{n} |z - x_k|^2$, or $|z - x_k|^2 = |(Re(z) - x_k) + iIm(z)|^2 \geq |Im(z)|^2$, d'où le résultat.

On sait qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, si et seulement si $|Im(z)|^n \leq |\chi_A(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ par la propriété précédente. Donc si (A_m) est une suite de matrices trigonalisables tendant vers A, en passant à la limite dans l'inégalité, par continuité de $A \mapsto \chi_A$ (qu'on justifiera plus tard), on obtient que A est également trigonalisable. $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est donc bien fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\square$

Application : Théorème de Cayley-Hamilton
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\chi_A(A) = 0$, où $\chi_A = det(XI_n - A)$.

Démonstration :
Montrons que l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & \chi_A(A) \end{array}$$

est continue. C'est la composée des applications $A \mapsto (\chi_A, A)$ et $(P, A) \mapsto P(A)$. Il suffit donc de montrer que chacune de ces applications est continue.
L'application $A \mapsto (\chi_A, A)$ est polynomiale en les formes coordonnées. Plus précisément, en écrivant, $\forall t \in \mathbb{C},\ det(A - tI_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(a_{ij})t^k$ où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, notre application s'écrit $A \mapsto ((P_k(a_{ij}))_k, A)$. Par continuité des formes coordonnées (linéaires en dimension finie), notre application est continue.
De plus, comme $A \mapsto A^k$ est continue, par combinaison linéaire, $(P, A) \mapsto P(A)$ est continue. ψ est donc bien continue.

Montrons que si A est diagonalisable, alors $\chi_A(A) = 0$.
Déjà, il est facile de vérifier que, si D est une matrice diagonale, alors $\chi_D(D) = 0$.
Écrivons donc $A = PDP^{-1}$ où $P \in Gl_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\chi_A(A) = \chi_D(A) = \chi_D(PDP^{-1}) = P\chi_D(D)P^{-1} = 0.$$

Ainsi, ψ est nulle sur l'ensemble des matrices diagonalisables. Par densité de cet ensemble dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ψ est nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, i.e $\chi_A(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.