

Convergence des séries de Dirichlet

Émile Séguret

Pour les leçons : 230, 241, 245, 265.

Pas de référence.

Prérequis. Pour $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de complexes, on note $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ la série de fonctions de la variable complexe s . Le développement suivant s'intéresse aux propriétés de convergence de la série ainsi qu'à la régularité de sa somme et son comportement asymptotique. Avec la notation standard $s = \sigma + it$, on désigne par

- $\sigma_c = \inf \{ \sigma \in \mathbf{R}, \sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma} \text{ converge} \}$ l'abscisse de convergence,
- $\sigma_{ac} = \inf \{ \sigma \in \mathbf{R}, \sum_{n \geq 1} |a_n| n^{-\sigma} \text{ converge} \}$ l'abscisse de convergence absolue,
- $\{ \sigma > \alpha \}$ l'ensemble des complexes de parties réelles $> \alpha$ (un réel donné).

Théorème. Soit $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_c < +\infty$.

1. S'il existe $s_0 = \sigma_0 + it_0$ tel que $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s_0}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ converge uniformément sur tout compact de $\{ \sigma > \sigma_0 \}$ vers sa somme f ,
2. $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ converge sur $\{ \sigma > \sigma_c \}$ et diverge sur $\{ \sigma < \sigma_c \}$, de plus f est holomorphe sur $\{ \sigma > \sigma_c \}$,
3. Si $-\infty < \sigma_c$, on a $\sigma_c \leq \sigma_{ac} \leq \sigma_c + 1$,
4. Pour tout $N \geq 1$, $f(s) = \sum_{n=1}^N a_n n^{-s} + o_{\sigma \rightarrow +\infty}(N^{-\sigma})$.

Preuve de 1. Pour $s = \sigma + it$ et $p \geq 1$, notons $f_p(s) = \sum_{n=1}^p a_n n^{-s}$. Par hypothèse $(f_p(s_0))_{p \geq 1}$ converge, donc $M = \sup \{ |f_p(s_0)|, p \geq 1 \} < +\infty$. Pour montrer que $(f_p)_{p \geq 1}$ converge uniformément vers f on va utiliser un critère de Cauchy uniforme à l'aide d'une transformation d'Abel. Soient $1 \leq p < q$ et s complexe,

$$\begin{aligned} f_q(s) - f_p(s) &= \sum_{n=p+1}^q (a_n n^{-s_0}) n^{-s+s_0} = \sum_{n=p+1}^q (f_n(s_0) - f_{n-1}(s_0)) n^{-s+s_0} \\ &= f_q(s_0) q^{-s+s_0} - f_p(s_0) (p+1)^{-s+s_0} + \sum_{n=p+1}^{q-1} f_n(s_0) (n^{-s+s_0} - (n+1)^{-s+s_0}). \end{aligned}$$

Donc

$$|f_q(s) - f_p(s)| \leq \frac{M}{q^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{M}{(p+1)^{\sigma-\sigma_0}} + M \sum_{n=p+1}^{q-1} |n^{-s+s_0} - (n+1)^{-s+s_0}|.$$

Comme $n^{-s+s_0} - (n+1)^{-s+s_0} = -\int_n^{n+1} (s-s_0)t^{-s+s_0-1} dt$, alors

$$|f_q(s) - f_p(s)| \leq \frac{2M}{(p+1)^{\sigma-\sigma_0}} + M|s-s_0| \sum_{n=p+1}^{q-1} n^{-\sigma+\sigma_0-1}.$$

Soit maintenant K un compact de $\{ \sigma > \sigma_0 \}$, alors il existe $R, \delta > 0$ tels que $K \subseteq \{ s, |s-s_0| \leq R, \sigma > \sigma_0 + \delta \}$ (faire le dessin au tableau). Alors

$$\|f_q - f_p\|_{\infty, K} \leq \frac{2M}{(p+1)^\delta} + MR \sum_{n=p+1}^{q-1} n^{-\delta-1} \xrightarrow{p, q \rightarrow +\infty} 0, \text{ ce que l'on voulait.}$$

Preuve de 2. Soit s de partie réel $\sigma > \sigma_c$. Par définition de σ_c , il existe $\sigma_c < \sigma_0 < \sigma$ tel que $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma_0}$ converge. Donc par 1, $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ converge. Si maintenant $\sigma < \sigma_c$, alors la convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ entraînerait (par 1) que pour tout $\sigma < \sigma_0 < \sigma_c$ la série $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma_0}$ convergerait. Impossible par définition de σ_c . Ainsi, le point 1 montre que pour tout $\sigma_0 > \sigma_c$, la série de Dirichlet converge uniformément sur tout compact de $\{\sigma > \sigma_0\}$. Comme les fonctions $s \mapsto n^{-s}$ sont holomorphe (sur tout le plan car ce sont des exponentielles), alors f est holomorphe sur le demi-plan $\{\sigma > \sigma_c\}$.

Preuve de 3. Comme la convergence absolue entraîne la convergence, on a bien $\sigma_c \leq \sigma_{ac}$. Supposons $\sigma_c > -\infty$. Par l'absurde, si $\sigma_c + 1 < \sigma_{ac}$, prenons $\varepsilon > 0$ et σ tels que $\sigma_c + 1 + \varepsilon < \sigma < \sigma_{ac}$. Alors la série $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma+1+\varepsilon}$ converge donc il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|a_n n^{-\sigma}| = |a_n n^{-\sigma+1+\varepsilon}| n^{-1-\varepsilon} \leq C n^{-1-\varepsilon}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc $\sigma > \sigma_{ac}$, absurde.

Preuve de 4. On suppose que la suite (a_n) n'est pas nulle. Soit $n_0 = \min \{n \geq 1, a_n \neq 0\}$. Par une récurrence sur $N \geq 1$, le point 4 découlera de l'asymptotique $f(s) = a_{n_0} n_0^{-s} + o_{\sigma \rightarrow +\infty}(n_0^{-s})$. Cela est équivalent à

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n n^{-s} = o_{\sigma \rightarrow +\infty}(n_0^{-s}) \quad \text{i.e.} \quad n_0^\sigma \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n n^{-s} \right| \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} 0.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{n_0}{n} \right)^\sigma \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} 0.$$

Or chaque terme de la somme converge vers 0 lorsque σ tend vers l'infini. La question est donc de savoir si l'on peut intervertir la limite et la somme. Il nous suffit pour cela d'une convergence uniforme en σ . Par définition de σ_{ac} (qui est fini par 3) il existe $\rho > \sigma_{ac}$ tel que $\sum_{n \geq 1} |a_n| n^{-\rho}$ converge. Cela entraîne une convergence uniforme sur l'ensemble des réels $\sigma \geq \rho$ puisque

$$|a_n| \left(\frac{n_0}{n} \right)^\sigma \leq n_0^\rho \frac{|a_n|}{n^\rho} \quad \text{terme générale (indépendant de } \sigma) \text{ d'une série convergente.}$$

Remarques.

- Dans le cas où $\sigma_c = +\infty$ le point 1 montre que la série diverge en tout point du plan.
- Par analogie avec les séries entières, on ne peut rien dire sur la droite $\{\sigma = \sigma_c\}$ d'une façon générale. Par exemple, avec $a_n = 1$, la série diverge en 1 et converge en $1 + it$, $t \neq 0$ (critère d'Abel?).
- Les inégalités dans 3 sont les meilleurs possibles. En effet on a $\sigma_{ac} = \sigma_c$ dès que les a_n sont positifs. Et on peut avoir $\sigma_{ac} = \sigma_c + 1$, par exemple avec $a_n = (-1)^n$ (critère de Riemann et théorème des séries alternées).
- On peut démontrer que si la somme f possède des zéros de parties réels strictement croissante, alors tous les a_n sont nuls et donc f est nulle.