Formule des compléments

Théorème :
1. Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{\pi}{sin(\pi x)}.$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0,1[$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

Démonstration :

Preuve du premier point
Soit $x \in]0,1[$.
Notons $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$, quantité bien définie d'après les intégrales de Riemann car $0 \leq \frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+x}}$.

Notons $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. On rappelle que pour tout $z = re^{i\theta} \in \Omega$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, on définit $z^x = r^x e^{ix\theta}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^x(1+z)} \end{array} \right. \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{-1\}).$$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $R \in]1, +\infty[$, on considère le lacet $\Gamma_{\varepsilon,R}$ $\mathcal{C}^1$ par morceaux, orienté positivement, paramétré par les applications :

$$\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Re^{it} \end{array} \right. \qquad \gamma_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}(1-t) \end{array} \right.$$

$$\gamma_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \varepsilon e^{-it} \end{array} \right. \qquad \gamma_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\, t \end{array} \right.$$

De plus, $\forall z \in \Omega \setminus \{-1\},\ (z+1)f(z) = z^{-x} \xrightarrow[z\to -1]{} e^{-i\pi x} = Res(f, -1)$.
D'après le **théorème des résidus** appliqué à f, on a alors :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi x}. \tag{1}$$

Nous allons à présent calculer l'intégrale de f sur chaque chemin et faire tendre ε et R vers leur valeur limite.

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi - \theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR^{1-x}e^{i(1-x)t}}{1+Re^{it}} dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-x}e^{i(1-x)t}}{1+Re^{it}} dt$$

par continuité de l'intégrale comme fonction de ses bornes.
Laissons maintenant tendre R vers $+\infty$:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-x}e^{i(1-x)t}}{1+Re^{it}}dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x}}{R-1}dt = 2\pi\frac{R^{1-x}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

De même, pour γ_3 :

$$\left|\int_{\gamma_3} f(z)dz\right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\varepsilon^{1-x}}{1-\varepsilon}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Pour les deux chemins restant, remarquons que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2^x(t)(1+\gamma_2(t))} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{-Re^{-2ix\pi}}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)},$$

et

$$\left|\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2^x(t)(1+\gamma_2(t))}\right| \leq \frac{R}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)} \in \mathbb{L}^1([0,1])$$

donc d'après le **théorème de convergence dominée** puis un changement de variable "$u = R - Rt$", on a :

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 \frac{-Re^{-2ix\pi}}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)}dt = \int_0^R \frac{-e^{-2ix\pi}}{u^x(1+u)}du.$$

De manière analogue, on obtient pour γ_4 :

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^R \frac{1}{t^x(1+t)}du.$$

On obtient donc, en laissant tendre ε vers 0, puis R vers $+\infty$ dans l'équation (1) :

$$(1-e^{-2i\pi x})I(x) = 2i\pi e^{-i\pi x}.$$

D'après la formule d'Euler, on a finalement :

$$I(x) = \frac{\pi}{sin(\pi x)}.$$

Preuve du second point
Soit $x \in]0,1[$. On a, d'après le **théorème de Fubini-Tonelli** :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} s^{-x}e^{-s}ds = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t}e^{-(t+s)}dtds.$$

Nous allons à présent effectuer un changement de variable à l'aide du $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (s,t) & \mapsto & \left(s+t, \dfrac{t}{s}\right) \end{array} \right.$$

d'inverse

$$\varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\dfrac{u}{1+v}, \dfrac{uv}{1+v}\right) \end{array} \right.$$

et de jacobien

$$det(J_{\varphi^{-1}}(u,v)) = det\left(\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+v} & \dfrac{-u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{bmatrix}\right) = \frac{u}{(1+v)^2} > 0.$$

Cela donne, par changement de variables :

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^x e^{-u} \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} dudv \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^x e^{-u} \frac{1}{v(1+v)} dudv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} du \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-x}(1+v)} dv \quad \text{(Fubini-Tonelli)} \\ &= I(1-x) \\ &= \frac{\pi}{sin(\pi(1-x))} \text{ d'après le premier point} \\ &= \frac{\pi}{sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in]0,1[\,\}$ est un ouvert connexe (par arcs) de $\mathbb{C}$.
D'après ce qui précède, $\Gamma(\cdot)\Gamma(1-\cdot)$ et $z \mapsto \frac{\pi}{sin(\pi z)}$ sont deux applications holomorphes sur U, qui coïncident sur $]0,1[$ qui admet $\frac{1}{2}$ comme point d'accumulation dans U.
D'après le **théorème de prolongement analytique**, ces deux applications coïncident sur U tout entier, i.e pour tout $z \in U$:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}.$$

$\square$