Théorème du relèvement

Thm: Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$, $n \geq 1$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{U}$, C^k avec $k \geq 2$.
Alors $\exists t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^k, telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = e^{it(x)}$

lemme: (Poincaré) Soit $\omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, C^1, $\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k dx_k$
où les $(\alpha_k)_{k=1}^{n}$ sont C^1. Alors sont équivalents :

(i) $\forall i, k = 1 \dots n$, $\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}$ (ω est fermée)

(ii) $\exists f : U \to \mathbb{R}$, C^2, tq $df = \omega$ (ω est exacte)

1] Preuve du lemme :

(ii) $\Rightarrow$ (i) : clair par le thm de Schwarz

(i) $\Rightarrow$ (ii) : • Soit $x \in \mathbb{R}^n$. La dérivée de $t \in [0;1] \longmapsto \alpha_i(tx)$
est $t \to d\alpha_i(tx).x$

• exhibons f. Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \int_0^1 \omega(tx).x \, dt$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Soit $M > 0$ tq $x \in B_2(0, M)$

On justifie plus tard le calcul suivant : Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \underbrace{\int_0^1 t \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}(tx) \, dt}_{} + \int_0^1 \alpha_i(tx) \, dt$$

$$\underset{(i)}{=} \int_0^1 t \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}(tx) \, dt \underset{IPP}{=} \underbrace{\Big[t \, \alpha_i(tx) \Big]_0^1}_{= \alpha_i(x)} - \int_0^1 \alpha_i(tx) \, dx$$

donc $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i \\ \forall i = 1 \dots n \end{cases}$ et (ii).

• justification de la dérivation sous l'$\int$:

α_k est C^1 donc la majoration : $\forall t \in [0;1]$, $\forall x \in B$:

$$\left| t \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}(tx) \right| \underset{CS}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \sup_{u \in \overline{B}} \left\| \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}(u) \right\|_2 M < +\infty$$

car α C^1 sur $\overline{B}$ qui est compact

intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi on pouvait dériver sous l'intégrale

2) retour au théorème :

. traitons le cas $n=1$:

- si t_0 est solution alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = i t_0'(x) u(x)$

donc cherchons t de la forme $t : x \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha + \frac{1}{i}\int_0^x \frac{u'}{u}$

où $u(0) = e^{i\alpha}$. u est à valeur dans $\mathbb{U}$ donc t est à valeurs réelles. $x \longmapsto u(x) e^{-it(x)}$ a une dérivée nulle, elle est constante sur $\mathbb{R}$, valant 1 en prenant $x=0$.

$$\text{et} \quad u(x) = e^{it(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

. traitons le cas général :

- Si t_0 est une solution alors $\forall k = 1 \dots n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x) = i \frac{\partial t}{\partial x_k}(x)\, u(x)$$

- Soit

$$w : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{iu(x)} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\, dx_k$$

, w est C^1

On va montrer qu'elle vérifie (ii) en montrant qu'elle vérifie (i) (cf. lemme). Soit $\alpha_k = \frac{1}{iu} \frac{\partial u}{\partial x_k}$

et calculons :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i} = \frac{1}{iu^2}\left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

Par schwarz, ceci est symétrique en i et k.

Par Poincaré, $\exists t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2, $dt = w$.

en choisissant $t(0)$ tq $u(0) = e^{it(0)}$

- $x \longmapsto u(x) e^{-it(x)}$ a une différentielle nulle sur $\mathbb{R}^n$, et vaut 1 en 0, elle est constante égale à 1 et

on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x) = e^{it(x)} \quad$ et t C^k