

Prolongement de ζ et équation fonctionnelle

Émile Séguret

Pour les leçons : 207, 235, 239, 245, 265

Références : Un mélange de :

- Analyse pour l'agrégation - Zuily Queffelec
- Calcul intégral - Candelpergher

Prérequis. Définitions et propriétés usuelles des fonctions Γ et ζ . En plus des théorèmes de prolongement analytique et d'holomorphic sous l'intégrale, le développement utilise deux résultats à savoir impérativement prouver devant le jury :

- La fonction $1/\Gamma$ se prolonge holomorphiquement à tout $\mathbf{C}$. On trouve une preuve de ce fait dans le développement « Prolongement de Γ et formule de Weierstrass ».
- La fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.$$

Cette relation nous permet de comprendre le comportement de φ en 0 en fonction de celui en $+\infty$; elle provient de l'équation fonctionnelle de la fonction θ de Jacobi, voir pour cela le développement « Formule sommatoire de Poisson et fonction θ de Jacobi ».

Théorème. La fonction ζ de Riemann possède un prolongement holomorphe à $\mathbf{C} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu 1. Si $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s)$, alors ξ est une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}$, avec une symétrie par rapport au point $1/2$:

$$\forall s \in \mathbf{C}, \quad \xi(1-s) = \xi(s).$$

Démonstration. On se fixe un complexe s de partie réel $\sigma > 1$. On a donc $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. On part de la définition de Γ sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$: $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{s/2-1} e^{-t} dt$. Soit $n \geq 1$. Pour faire apparaître notre fonction φ , on fait le changement de variable $t = n^2\pi x$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} n^{s-2} \pi^{s/2-1} x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x} n^2\pi dx \quad \text{i.e.} \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x} dx \quad (1).$$

On somme ces relations pour n entre 1 et $+\infty$: $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x} dx$.

On souhaite intervertir les signes de sommations. Pour ce faire on utilise la relation (1) valable pour tout complexe de partie réelle > 1 , donc en particulier pour $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x}| dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{\sigma/2-1} e^{-n^2\pi x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \pi^{-\sigma/2} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty.$$

D'où

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \int_0^{+\infty} x^{s/2-1} \varphi(x) dx.$$

Soufflons un peu. Nous avons réussi à faire intervenir nos deux protagonistes φ et $1/\Gamma$ (en divisant par Γ). On aimerait montrer que le terme de droite peut s'étendre méromorphiquement à $\mathbf{C}$, mais avec une intégrale sur $]0, +\infty[$ cela n'aboutira pas (voir la remarque ci-dessous). Connaissant le comportement de φ en 0, nous allons couper l'intégrale en deux et utiliser l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = I + \int_1^{+\infty} x^{s/2-1} \varphi(x) dx \quad (2), \quad \text{où l'on a noté}$$

$$I = \int_0^1 x^{s/2-1} \varphi(x) dx = \int_0^1 x^{(s-3)/2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^{(s-3)/2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^{s/2-1} dx.$$

On effectue le changement de variable $y = 1/x$ dans la première intégrale et on calcule directement les deux autres :

$$I = \int_1^{+\infty} y^{(3-s)/2} \varphi(y) \frac{dy}{y^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^{(s-1)/2}}{(s-1)/2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^{s/2}}{s/2} \right]_0^1 = \int_1^{+\infty} y^{(1-s)/2} \varphi(y) \frac{dy}{y} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Avec (2), cela donne

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x^{(1-s)/2} + x^{s/2}}{x}}_{=f(x,s)} \varphi(x) dx + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \quad (3).$$

La fonction f est bien définie pour $x \geq 1$ et s complexe. On divise par Γ de chaque côté (Γ ne s'annule pas). Nous allons maintenant travailler avec la relation suivante, définie jusqu'à maintenant pour s de partie réelle > 1 ,

$$\zeta(s) = \underbrace{\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)}}_1 - \underbrace{\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)s}}_2 + \underbrace{\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}}_3 \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x,s) dx}_4 \quad (4).$$

Montrons que le terme de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$.

- Terme 1 : comme $1/\Gamma$ est entière, ce terme est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)} = 1$ (voir remarque ci-dessous),
- Terme 2 : 0 est un pôle simple de Γ , donc 0 est un zéro simple de $1/\Gamma$, donc ce terme est holomorphe sur $\mathbf{C}$,
- Terme 3 : holomorphe sur $\mathbf{C}$, car $1/\Gamma$ est entière,
- Terme 4 : on utilise le théorème d'holomorphicité sous l'intégrale pour démontrer que ce terme est une fonction entière,
 - $\forall s \in \mathbf{C}$, $x \mapsto f(x,s)$ est continue,
 - $\forall x \geq 1$, $s \mapsto f(x,s)$ est entière,
 - Domination sur $K \subset \mathbf{C}$ compact : il existe $a \leq b$ réels tels que, $\text{Re}(K) \subset [a,b]$. Si $x \geq 1$ et $s \in K$, par définition de φ on a

$$|f(x,s)| \leq \left| \frac{x^{(1-s)/2} + x^{s/2}}{x} \varphi(x) \right| \leq \frac{x^{(1-\sigma)/2} + x^{\sigma/2}}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-\pi x})^n \leq \frac{x^{(1-a)/2} + x^{b/2}}{x} \frac{1}{e^{\pi x} - 1},$$

majoration par une fonction indépendante de s et intégrable sur $]1, +\infty[$.

Conclusion : par somme, la relation (4) permet de prolonger ζ de façon unique comme annoncé (prolongement analytique). Enfin, pour tout complexe s , la relation (3) multipliée par $s(s-1)/2$ donne

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} f(x, s) dx + \frac{1}{2} \quad \text{qui est bien une fonction entière.}$$

Comme $f(x, 1-s) = f(x, s)$, il vient $\xi(1-s) = \xi(s)$.

Remarques.

- Revenons sur l'intérêt de l'équation fonctionnelle de φ . Précisément, montrons pourquoi l'égalité $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \int_0^{+\infty} x^{s/2-1} \varphi(x) dx$ ne permet d'aboutir directement au théorème. Pour ce faire on voudrait utiliser le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale. Mais lors de la domination, on obtient

$$\left| x^{s/2-1} \varphi(x) \right| \leq \frac{x^{\sigma/2-1}}{e^{\pi x} - 1} \quad \text{intégrable en } +\infty.$$

Et $\frac{x^{\sigma/2-1}}{e^{\pi x} - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi} x^{\sigma/2-2}$ intégrable en 0 si, et seulement si, $\frac{\sigma}{2} - 2 > -1$ i.e. $\sigma > 2$, ce qui ne permet pas d'étendre à tout $\mathbf{C}$.

- $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} 2u \frac{du}{u} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$