

THEOREME D'ABEL ANGULAIRE ET TAUBERIAN FAIBLE.

Leçons 230, 243

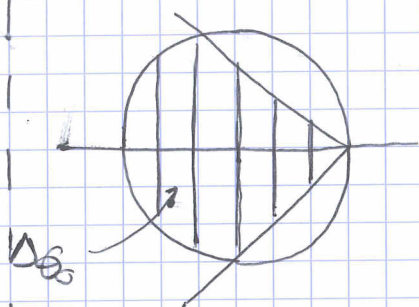
Référence Goursat

Théorème (Abel angulaire.)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge, on note f la somme de la série.

Soit $\theta_0 \in [0; \pi/2[$

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \exists p > 0 \exists \theta \in]-\theta_0; \theta_0[\mid z = 1 - pe^{i\theta}\}$$



$$\text{Alors } \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Théorème (Tauberien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f sur le disque unité.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ existe et vaut S
 $a_n = o(1/n)$

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S.$$

Résumé

I - Abel i - Transformation d'Abel pour exprimer $f(z) - S$

ii - Majoration de $f(z) - S$

iii - Un cas où la réciproque est fautive.

II - Tauber i - Calcul de $\sum_{k=0}^n a_k = f(x)$

ii - Majoration pour $x = 1 - \varepsilon/n$.

I / i Notations: $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$
 $R_n = S - S_n$

Remarque: $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Calculons; pour $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) + \cancel{R_0(z^0 - 1)} - R_N(z^N - 1) \\ &= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1) \end{aligned}$$

Des lors, $N \rightarrow +\infty$ donne:

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

ii On sait que $R_n \rightarrow 0$.

Donc prenons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n \right| + |z-1| \left| \sum_{n=N}^{+\infty} R_n z^n \right| \\ &\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| |z|^n + |z-1| \sum_{n=N}^{+\infty} |R_n| |z|^n \\ &\leq |z-1| \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}. \end{aligned}$$

* Des lors, d'une part, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on a $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ où $\varphi \in]-\theta_0; +\theta_0[$

$$\begin{aligned} \frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2} (1+|z|) \\ &= \frac{\rho}{1-(1-\rho \cdot 2\cos\varphi + \rho^2)} (1+|z|) \\ &< \frac{2}{2\cos\varphi \cdot \rho}. \end{aligned}$$

Or on va s'intéresser à $z \rightarrow 1$, on peut donc choisir $\rho \leq \cos \Theta_0$.

$$\frac{|z+1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos\Theta_0 - \cos\Theta_0} = \frac{2}{\cos\Theta_0}.$$

* D'autre part, l'autre côté de la somme :

on peut choisir α tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| \leq \varepsilon$, il suffit alors de prendre $|z-1| \leq \alpha$.

$\rightarrow$ en résumé, si $z \in \Delta_{\Theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf(\cos\Theta_0, \alpha)$, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \frac{2}{\cos\Theta_0} \varepsilon$$

d'où le résultat !

iii. La réciproque est fautive ! Par exemple :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

Mais la série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement...

$\rightarrow$ on va devoir rajouter une hypothèse.

ii. i. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ comme tout à l'heure.

On peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}$, $x \in]0, 1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^{n+1}) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Mais remarquons que

$$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) \leq k(1 - x)$$

$\frac{n}{N} \rightarrow 1$ pour $n \geq N$

On peut donc majorer gentiment:

$$\begin{aligned} |S_N - f(x)| &\leq (1-x) \sum_{n=1}^N n |a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n |a_n|}{N} x^n \\ &\leq (1-x) \cdot \Pi \cdot N + \frac{\sup_{n \geq N} n |a_n|}{N(1-x)} \end{aligned}$$

où Π est un majorant de $(n|a_n|)$.

ii Faisons passer cette inégalité: soit $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$, on a

$$|S_N - f(1 - \varepsilon/N)| \leq \Pi \varepsilon + \frac{\sup_{n \geq N} n |a_n|}{\varepsilon}$$

Mais alors la suite $n|a_n|$ tend vers 0 sans toucher 0, en outre on peut supposer $\sup_{n \geq N_0} n |a_n| \leq \varepsilon^2$ pour un certain N_0 .

On a alors bien sûr, pour $N \geq N_0$

$$|S_N - f(1 - \varepsilon/N)| \leq (\Pi + 1) \varepsilon.$$

• Généralisons à $f(x)$:

$$|S_N - S| \leq |S_N - f(1 - \varepsilon/N)| + |f(1 - \varepsilon/N) - S|$$

On a déjà majoré le premier terme, pour $N \geq N_0$.

Pour le deuxième, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} S$ par hypothèse

donc il existe N_1 tel que $N \geq N_1$ donne $|f(1 - \varepsilon/N) - S| \leq \varepsilon$

On a donc $|S_N - S| \leq (\Pi + 2) \varepsilon$ pour $N \geq \max(N_0, N_1)$.