Groupe circulaire.

Leçons : 182, 183.

Référence : Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique de Ladegaillerie.

Contexte : On considère la sphère $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et on appelle un 'cercle' un cercle sur la sphère, donc un cercle de $\mathbb{C}$ ou une droite de $\mathbb{C}$ avec le point ∞ (suivant que le cercle sur la sphère passe par ∞ ou non).

Le théorème à démontrer est le suivant :

Théorème : Soit $f : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ bijective. Il y a équivalence entre :

i) f transforme tout 'cercle' en un 'cercle' ;

ii) f est une similitude ou le produit d'une inversion positive par une isométrie ;

iii) f est une homographie ou une antihomographie.

L'ensemble de ces applications, muni de la composition, est un groupe.

On l'appelle le groupe circulaire.

Il nécessite plusieurs lemmes, qu'on peut choisir de démontrer dans le développement ou pas, suivant ce qui nous intéresse et notre rythme.

Si on maîtrise les similitudes, les inversions, les homographies et les antihomographies, la preuve de ce théorème n'est vraiment pas difficile. Dans le livre de Ladegaillerie il y a de longues explications (avec des dessins !) sur ces applications, donc même si vous n'avez jamais entendu parler d'inversion (au sens géométrique) de votre vie, ne paniquez pas ! Toutes les définitions, tous les lemmes et toutes les preuves nécessaires sont dans le livre de Ladegaillerie (qui a un excellent index pour s'y retrouver), que je vous conseille par ailleurs de lire (en diagonale si vous manquez de temps) parce qu'il y a dedans tout ce qu'il vous faut pour la partie Géométrie du programme de l'agrégation et parce que c'est un excellent livre de géométrie.

Commençons par regarder la preuve du théorème.

La caractérisation par le i) nous donne immédiatement le fait que l'on a un groupe (et le nom du groupe).

Montrons que i) implique ii). Si $f(\infty) = \infty$ alors f transforme tout cercle de $\mathbb{C}$ en un cercle de $\mathbb{C}$ donc f est une similitude (à mettre en lemme). Sinon, notons $w = f(\infty) \in \mathbb{C}$. Soit i une inversion positive de pôle w ; $i(f(\infty)) = i(w) = \infty$ donc, avec le cas précédent (pour s'y ramener il faut notamment savoir que les inversions transforment tout 'cercle' en un 'cercle', je le fais plus bas), $i \circ f$ est une similitude, donc il existe une isométrie ψ et une homothétie h de centre w et de rapport positif telles que $i \circ f = h \circ \psi$ i.e. $f = i \circ h \circ \psi$ et $i \circ h$ est une inversion positive.

Pour montrer que ii) implique iii) il suffit de remarquer que les similitudes sont de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ et que les inversions sont de la forme $z \mapsto \frac{\omega\bar{z}+\alpha-|\omega|^2}{\bar{z}-\bar{\omega}}$ (et de savoir reconnaître une homographie / antihomographie, soit en faisant les calculs soit en sachant que les applications du iii) forment un groupe (je conseille de se pencher sur ce dernier point plutôt que de faire les calculs).

Pour montrer que iii) implique i) il suffit de savoir que le birapport $[a, b, c, d]$ est réel ssi a, b, c, d sont alignés ou cocycliques et de montrer que les homographies et antihomographies conservent ou conjuguent le birapport (donc conservent le fait qu'il est réel si c'est le cas).

Pour le lemme sur les inversions, si $I : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est l'inversion de pôle Ω et de puissance α, prenez Ω pour origine pour vous simplifier la vie (i.e. $\Omega = 0$, vous êtes sur une sphère donc vous mettez le point 0 où vous voulez), vous aurez alors $I(\infty) = 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ $I(z) = \frac{\alpha}{\bar{z}}$.

Ainsi le birapport $[I(a), I(b), I(c), I(d)] = [\frac{\alpha}{\bar{a}}, \frac{\alpha}{\bar{b}}, \frac{\alpha}{\bar{c}}, \frac{\alpha}{\bar{d}}] = \overline{[a, b, c, d]}$ est réel ssi le birapport $[a, b, c, d]$ est réel donc $I(a), I(b), I(c), I(d)$ sont sur un même 'cercle' ssi a, b, c, d sont sur un même 'cercle' or $I : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est bijective donc I transforme tout 'cercle' en un 'cercle'.